講座

オペレーション・リサーチ

〔2〕

大阪府立大学工学部*
藤　沢　俊　男

オペレーション・リサーチとは，一組織にその運用に関する決定のための数量的基礎を提供する，科学的方法である。

2. ORの方法

2.1 ORの方法概説

ORは，どのような問題に適用されるにせよ，次のような段階をふんで行われるものである．すなわち，

(1) 問題の設定
(2) 研究しようとしている組織あるいは系の仂きを表わす数学的あるいは物理的モデルの構成
(3) モデルの分析から，組織あるいは系の仂きの成果をはかる効率の尺度をつくり，それによつて最適解を求めること．
(4) 得られた解を実際の仕事にあてはめること．

以上の段階は，科学や工学において実際問題の研究ないしは解決に多少とも経験を有する人々にとつては自明の道理である．(1)にいう問題の設定は組織における意志決定の側が解決を希望する問題に関して，OR従事者が目標とさまざまな制限を明確に定めることである．本質的に問題に関連する幾多の要因のなかから，経験上重要なものをとりあげ，あるいは数学的ないしは統計的分析などによつて考慮に入れるべき要因をひろいあげることもこの段階に入ろう．(2)は(1)にもとずき，抽象化の過程をへて，数学的あるいは物理的モデルを組立てる段階である．たとえば，1.2における潜水艦による対船攻撃のばあいのような確率論的モデルや1.3における物理的モデルがそれである．(3)はこのようにして得られた数学的あるいは物理的モデルから最適解を見出すことである．単に実行可能な解といういみでは多くの解が存在するであろうが，我々が見出したいのは組織の目的に合致した最適の解を見出すことである．そのためには，組織の仂きが目的に対してどれほどの効果を有するかを計る「効率の尺度」が定められていなければならない．それによつて効率を最大ならしめる解を見出すのが(3)の仕事である．たとえば1.2では，効率は相対効率Rの大小で計られ，Rを最大ならしめるnが求める最適解である．(4)は(3)で得た解を実際にとるべき運用の方法に解釈する過程である．

数学的あるいは物理的モデルの構成およびそれから解を見出すためには種々さまざまの方法が用いられる．そのなかの代表的なものをいくつかとりあげて解説するのが本章の目的である．分類にあたつてはオペレーションの型からわけて，たとえば競合型の問題 (Competitive model)，配分型の問題 (Allocation model) というように分けて論ずるのが，一面からすれば，理にかなつたものであろうが，かんたんにまとまりにくいので数学的ないしは物理的見地からの方法の分類をおこなうことにした．ここで論じないもののうちにも心理測定法，自仂制御の理論，経済統計学の方法など重要なものがあることを附記しておく．

2.2 ゲームの理論 (Theory of Games)

ゲームとは幾人かの競技者がルールの定める制限内で互いに競合し，結果に応じた利益をえ，あるいは損失をこうむるものである．室内遊戯，入札の問題から経済競争，戦争などはすべてゲームである．大きくわけてゲームには，ルーレットのように偶然のみによつて結果が定まるものと，ポーカーや碁のように競技者の技倆が結果を左右しうるものがある．後者がゲームの理論，詳しくいえば策略のゲーム (games of strategy) の理論の対象である．

ゲームの理論の根幹をなすものは，次にのべる零和二者ゲーム (zero-sum two-person game) である．競技者Aは区間〔0,1〕から一つの数xを選ぶ（これが彼の手，すなわち策略である）．競技者Bも区間〔0,1〕から一つの数yを選ぶ．ただし，AもBもお互いに他の選択が何であるかを知らないで自己の策略をえらぶものとする．AがxをBがyを選んだとき

Aの利益＝Bの損失＝W (x,y) ………… (2.1)

とする．Wが負の値をとれば，Aは $|W|$ だけの損失を，Bはそれだけの利益をうけるものと解釈する．Aの

* 堺市百舌鳥東之町，工業経営学教室

利益とBの利益の和はつねに零であるから，このゲームを零和とよんだのである．

Aが利益を最大にしようとして $\mathrm{Max}_{x,y}\,W(x,y) = W(x^1,y^1)$ を狙つて策略 x^1 を選んでみても，Bが偶々 y^1 を選んでくれない限り MaxW はえられない．すなわちAの利益は彼自身の策略によつてのみ定まるのではないから，Aにとつての合理的な策略はこのように単純なマキシマム・プリンシプルから定まるものではない．マキシマム・プリンシプルに対抗して消極的な安全策はミニマツクス（minimax）・プリンシプルにしたがうことである．これは各策略を採用したときに起りうる最大の損失をくらべて，それが最小になる策略を選ぶという原理である．したがつて，A，Bのミニマツクスの策略をそれぞれ x_o，y_o とすれば，

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Min}_y\,W(x_o,y)&=\mathrm{Max}_x\,\mathrm{Min}_y W(x,y)=v_1\\ \mathrm{Max}_x\,W(x,y_o)&=\mathrm{Min}_y\,\mathrm{Max}_x\,W(x,y)=v_2\end{aligned}\right\}\cdots(2.2)$$

一般に

$$v_2=\mathrm{Max}_x W(x,y_o)\geqq W(x_o,y_o)\geqq \mathrm{Min}_y W(x_o,y)=v_1$$

から，$v_1\leqq v_2$ であるが，等号のなりたつばあい，ゲームは決定的であるという．このとき，$v_1=v_2=W(x_o,y_o)=v$ をゲームの値（value）といい，

$$W(x,y_o)\leqq W(x_o,y_o)=v\leqq W(x_o,y)\cdots\cdots(2.3)$$

が成立する．この関係は，Aが策略 x_o を用いるときBは y_o を採用するのが損失を最小にする途であり，Bが y_o を用いるときAは x_o を採用するのが最善の方法であることを示している．かくて両者がミニマツクスの策略を用いる限り，もはや両者ともにその策略を変更する理由をもたずゲームは安定する．このいみでゲームは決定的であるといわれ，ゲームの値が両者の妥協点としていみをもつのである．

ミニマツクスの策略を導くときに考えた最悪の事態は，実は相手方に自己の策略をスパイされるばあいにはつねにおこるのである．したがつて，v_2 はAが相手方の策略をスパイできるときに，それ以上であることを保証されるAの利益額である．同様に v_1 はBが相手方の策略をスパイできるときに，それ以下であることを保証されるBの損失額である．それゆえゲームが決定的なばあい（$v_1=v_2$）には，$v=v_1=v_2$ を保証するミニマツクスの策略は両者にとつて満足できるものであろう．僥倖をねらつて他の策略をとつたとき，相手方が手固くミニマツクスの策略を用いる限り損失は一般に大きくなる．そこで決定的なゲームにおいては，ミニマツクスの策略が最適の策略（optimum strategy）とよばれている．

決定的でないゲームを考えてみよう．v_1 はAが相手方に自己の策略をスパイされるばあいの利益の最大限度で，v_2 は彼が相手方の策略をスパイできるときの利益の最低数である．したがつて $v_1<v_2$ ならば，(v_2-v_1) だけの差はAにスパイ活動に対する動機を与える．Bにとつても事情は同じであり，決定的でないゲームにおいては相手方に策略をスパイされない工夫が必要である．それにはランダムな手を用いるのがよい．ランダムな手とは，どの策略を用いるかを予め定めておかず，種々の策略をそれによつて用いる確率分布だけを定めておくものである．これを混合策略（mixed strategy）という．すなわち，A，B両者の混合策略はそれぞれ〔0,1〕の分布関数 $F(x)$，$G(y)$ で表わされる．A，Bはそれぞれ分布関数の全体から，その一つを自己の混合策略として選び，A，Bの選んだ混合策略がそれぞれ $F(x)$，$G(y)$ ならば

Aの利益の期待値＝Bの損失の期待値

$$=E(F,G)=\int_0^1\int_0^1 W(x,y)dF(x)dG(y)\cdots(2.4)$$

このようにして，もとのゲームの混合拡張（mixed extension）とよばれる新しいゲームに到達した．この新しいゲームでは，A，Bはそれぞれ〔0,1〕の確率分布を策略として選ぶ．A，Bの選択がそれぞれF，Gならば Aの利益（の期待値）すなわちBの損失（の期待値）はE（F，G）である．そこで前と同様にして

$$\mathrm{Max}_F\mathrm{Min}_G E(F,G)=\mathrm{Min}_G\mathrm{Max}_F E(F,G)=v\cdots(2.5)$$

のばあい，混合拡張ゲームは決定的で，ミニマツクスの（混合）策略 F_o，G_o は

$$E(F,G_o)\leqq E(F_o,G_o)=v\leqq E(F_o,G)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.6)$$

を満足するものである．(2.5) のvは $v_1\leqq v\leqq v_2$ の関係にあることを証明するのは容易である．このように混合拡張ゲームが決定的ならば，ミニマツクスの混合策略を最適のものであるという．

Aは駆潜艇であり，Bは潜水艦で，1哩の幅の海峡をAが哨戒し，Bが通りぬけようとしているものと考える．駆潜艇が潜水艦を発見して撃沈できるのは駆潜艇の左右それぞれ $1/5$ 哩の幅のはんい内を潜水艦が通るばあいであると仮定する．そこで $|x-y|\leqq 1/5$ なら $W(x,y)=1$，さもなければ $W(x,y)=0$ であるとする．

このゲームが決定的でないことは明白であろう．潜水艦がどこを通るかを駆潜艇が知れば，駆潜艇はそこに待ちうけて撃沈してしまう．逆に駆潜艇がどこに位置するかを潜水艦が知れば，彼は安全なところを通りぬけていくであろう．すなわち $0=v_1<v_2=1$ である．

さて，Aは〔0,1〕の間で $2/5$ の幅の区間を選び，もしこの区間内にyがあれば，利益1をえ，さもなければ利益0をうると考えてもよいであろう．〔0,1〕をおおう三つの区間〔0, $2/5$〕，〔$2/5$, $4/5$〕，〔$3/5$, 1〕を指定して，そのな

かの一つを無作為に，つまり等確率⅓でそれぞれを選ぶというAの混合策略を F_o とすれば，Bがどのような混合策略を選ぶにせよ，y をうちに含む確率は⅓以上である．したがつて

$$E(F_o, G) \geqq 1/3 \cdots\cdots (2.7)$$

他方，三点0，½，1のうちの1つより多くを内に含むような幅⅖の区間はないから，Bがこの三点を無作為に選ぶ混合策略を G_o とすれば，y がAの選ぶ区間内におちる確率はつねに⅓以下である．したがつて

$$E(F, G_o) \leqq 1/3 \cdots\cdots (2.8)$$

(2.7)，(2.8) より

$$E(F, G_o) \leqq E(F_o, G_o) = 1/3 \leqq E(F_o, G) \cdots\cdots (2.9)$$

をうる．すなわちゲームの値は⅓で，F_o, G_o はそれぞれA，Bの最適の混合策略である．

以上は故 Von Neumann の創始にかかるゲームの理論の一端を紹介したものである．彼の理論は零和でないゲームや三人以上の競技者のゲームをも含み，三人以上のゲームにおいては同盟関係というようなものも考慮に入れている．*

ゲームの理論がORにおいて用いられるのは競合型のオペレーションにおいてであり，また不確定な状況における計画樹立の問題においてである．後のいみでは統計学における故 Wald の統計的決定関数 (statistical decision functions) の理論も注目されてよい．

2.3 情報理論 (Information Theory)

情報理論は通信系における情報伝達の問題を取扱う学問である．情報ということばはニュースないしは秘密ニュースとして個々のばあいの事情，時，意味内容に関係するものとして理解されがちであるが，ここではそういういみで情報ということばを用いているのではない．抽象的に，単にいく通りのことなつた情報があるか，およびそれぞれはどの程度の確からしさでおこるかということだけに着目しているのである．

いま，n 個のことなる情報 L_1，L_2，‥ Ln があり，Li が生起する確率を Pi とする．このように情報を発生する源を情報源という．Liなる情報をうけとつたとき，Piが小さいほど，多くの智識をえたと考えるのは当然のことである．起りにくいことがおこつたのを知ることは起り易いことがおこつたのを知るより価値があるから．そこで，このときには −log Pi だけの情報量をえたものと定義する．しからば，情報源の一情報あたりの平均情報量として

$$H = -\sum Pi \log Pi \cdots\cdots (2.10)$$

なるエントロピーが定義される．

さて，ある通信路が情報 Li を符号 Si によつて伝達するとき，その時間長を ti とすれば，一情報あたりの平均時間長Lは

$$L = \sum Piti \cdots\cdots (2.11)$$

である．したがつて，毎秒あたりでは平均 I/L 個の情報が送られることになる．それゆえ通信路は毎秒

$$R = H/L \cdots\cdots (2.12)$$

だけの情報量を送つているわけで，このRを情報伝達速度という．Rは Pi によつてかわるが，その最大値を通信路容量という．これをCで表わせば

$$C = \mathrm{Max}R = \mathrm{Max}\,(H/L) \cdots\cdots (2.13)$$

この最大伝達速度を与える P_1，‥Pn は次のようにして求められることが知られている．*

Wを

$$\sum W^{-ti} = 1 \cdots\cdots (2.14)$$

の最大の正実根とするとき，$Pi = W^{-tj}$ (i=1，‥n) が最大伝達速度を与える情報源である．またこのとき C=logW であることも容易にわかる．

情報理論を含めて「動物および機械における通信と制御の理論」であるサイバネチクスがORにおいて果す役割は恐らく非常に重大なものであろうが，ここではそれに深入りせず，情報理論の簡単な一応用例を示しておく．いまn個の商品があり，第i番目の型の商品価格はKi 円であるとする．ただし，この価格は正確に商品価値を反映しているものとする．消費者は集団としては，その負担を最小にするように行動するものと考えられる．そこで消費者は「商品一単位の平均（選択）情報量あたり，消費者の負担が最小になるように行動する」ものと仮定する．その結果，第i番目の型の商品を選ぶ確率は Pi であるとしよう．すると消費者一人当りの負担額は

$$K = \sum PiKi$$

で，商品一単位を選ぶにあたつての平均情報量は

$$H = -\sum Pi \log Pi$$

である．したがつて K/H を最小，すなわち H/K を最大にするように行動するわけであるが，これは前述のH/Lの最大化と全く同じで，商品価格 Ki のものは $Pi = W^{-Ki}$ の割合で売れることになる．ただし，Wは $\sum W^{-Ki} = 1$ の最大正実根である．

商品価値がそのまま価格となるようなクーポン券，商品券などで，この考え方にぴつたりしたがうものが屢々

* 邦文の文献を一つあげれば，現代応用数学講座ゲームの理論，岩波書店，近刊

* 邦文の文献を一つあげれば，現代応用数学講座，情報理論，岩波書店 1957

ある．

上述の原理は統計学における最尤推定法と次のように関係している．売上総額Tについて第 i 番目の型の商品の販売個数を mi とすれば

$$T=\sum Kimi$$

という関係がある．そこで $P_1^{m_1}\cdot\cdot Pn^{m_n}$ を尤度関数とみて，

$$\log\{P_1^{m_1}P_2^{m_2}\cdot\cdot Pn^{m_n}\}/T$$

を最大にする $P_1, P_2, \cdot\cdot Pm$ の値がその最大推定値であるが，これはTが充分大きければ，$-\sum Pi\log Pi/\sum KiPi$ を最大にすることに同じになる．したがつて上述の消費者選択の原理はこの点からも裏付けられるのである．

2. 4 線型計画法 (Linear Programming)

線型計画法とはいくつかの変数の一次関数の最大あるいは最小を，有限個の一次不等式あるいは等式の制限のもとに，求める方法である．その代表的な問題は次のようにかける．制限

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdot\cdot+a_{in}x_n=b_i \ (i=1,\cdot\cdot m)\cdots(2.15)$$

$$x_i\geqq 0 \qquad (i=1,\cdot\cdot m)\cdots(2.15)'$$

のもとで，一次関数（目標関数ともいう）

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdot\cdot+c_nx_n \cdots\cdots\cdots\cdots (2.16)$$

の最大を求めよ．

(2.15)，(2.15)′ を満足する $x_1,\cdot\cdot x_n$ の値の一組を実行可能解 (feasible solution) という．ここで次に示すようにベクトルを定めよう

$$Pj=\begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix} (j=1,\cdot\cdot n),\quad B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

そうすると実行可能解は

$$\left.\begin{array}{l} x_1P_1+x_2P_2+\cdot\cdot+x_nP_n=B\\ x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ \cdot\cdot,x_n\geqq 0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.17)$$

というように書き表わすことができる．

m個の値 $x_{i1}, x_{i2},\cdot\cdot, x_{im}$ だけが正値で，他は零である実行可能解において，ベクトル $Pi_1, Pi_2, \cdot\cdot Pi_m$ が一次独立ならば，この実行可能解を基本解 (basie solution) という．いま記号のかんたんのために $x_1>0, \cdot\cdot x_m>0$, $x_{m+1}=\cdot\cdot=x_n=0$ で $P_1, \cdot\cdot P_m$ が一次独立なる基本解が与えられたとしよう．これは

$$\left.\begin{array}{l} x_1P_1+\cdots\cdots+x_mP_m=B\\ x_1>0,\ \cdots\cdots,x_m>0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.18)$$

と書き表わされる．一次独立な m 個の m 次のベクトル $P_1,\cdot\cdot,P_m$ はm次のベクトル全体の基底 (basis) をなすから，任意のm次のベクトルはこれらの一次結合として一意的に表わされる．したがつて

$$P_s=d_{s1}P_1+\cdot\cdot+d_{sm}P_m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.19)$$

$$(s=m+1,\cdot\cdot,n)$$

(2.18)，(2.19) から次のような実行可能解がえられる．すなわち

$$\left.\begin{array}{l} (x_1-d_{s1}\theta)P_1+\cdot\cdot+(x_m-d_{sm}\theta)P_m+\theta P_s=B\\ x_1-d_{s1}\theta\geqq 0,\ \cdot\cdot,x_m-d_{sm}\theta\geqq 0,\ \theta\geqq 0\end{array}\right\}(2.20)$$

このとき目標関数値は

$$c_1(x_1-d_{s1}\theta)+\cdot\cdot+c_m(x_m-d_{sm}\theta)+c_s\theta$$
$$=(c_1x_1+\cdot\cdot+c_mx_m)+\theta\{c_s-(c_1d_{s1}+\cdot\cdot+(Cmdsm)\}$$

となる．したがつて

$$c_s\leqq c_1d_{s1}+\cdot\cdot+c_md_{sm}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.21)$$

ならば，x_s の値を $\theta>0$ にとることによつて目標関数値は増大しない．それゆえ，(2.21) がすべての s ($m+1\leqq s\leqq n$) について成立すれば $x_{m+1},\cdot\cdot,x_n$ の全部あるいは若干個を零から正値にどのようにふやしても目標関数値は増大しない．つまり (2.18) は最大を与える解なのである．これに反して

$$c_s>c_1d_{s1}+\cdot\cdot+c_md_{sm}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.22)$$

ならば，$\theta>0$ に対して実行可能解 (2.20) は (2.18) より大きい目標関数値を与える．θ の値の限界は (2.20) からして，$d_{si}>0$ なるものについて x_i/d_{si} をくらべて一番小さい値である．かりに，この最小値が x_1/d_{s1} であるとしよう．$\theta_o=x_1/d_{s1}$ にとれば (2.20) は

$$\left.\begin{array}{l} (x_2-\theta_o ds_2)P_2+\cdot\cdot+(xm-\theta_o d_{sm})P_m\\ \qquad +\theta_o P_s=B\\ x_2-\theta_o d_{s2}>0,\ \cdot\cdot,x_m-\theta_o d_{sm}>0,\\ \qquad \theta_o>0\end{array}\right\}\cdots(2.23)$$

とかけ，容易にわかるように $P_2,\cdot\cdot,P_m,P_s$ は一次独立であるから，(2.23) は (2.18) より大きい目標関数値を与える一基本解である．

この計算をくりかえせば，基本解の数は有限個であるから，いつかは目標関数値をそれよりふやせないという基本解に到達する．前にのべたようにこれは最大値を与える解である．

上にのべたのはシンプレツクス法(simplex method)* とよばれている方法で，実際の計算は機械的におこなえるようになつている．線型計画法は解法の易しさから，現在最も普及しており，よく実用に供されている．

* 邦文の文献を一つあげれば，現代応用数学講座，線型計画法，岩波書店，近刊

（次号に続く）