講 座

オペレーション・リサーチ

〔3〕

大阪府立大学工学部 *
藤 沢 俊 男

2. 5 待合せ理論 (Waiting line theory)**

待合せ理論は今世紀初頭デンマークの電話技術者 A. K. Erlang の研究を起源とし，電話交換においてはトラフィック理論として知られているものである．待合せ理論とは，かんたんにいえば，人間でも物品でもよいがそれらが何らかの処理，サービスとか修理などを要求してある地点に到着し，そこで順番待ちの行列をつくるようなばあいの輻輳を解析し，それによつて処理機構の設計の基礎にしようというものである。この理論の戦後の発展もまためざましいのであるが，ここでは旧来から知られているものの一つ出生死滅過程 (birth and death process) についてのべる．

読者に物理的なイメージをもつてもらうために，有料道路のある関門で料金を払つて通過する自動車の行列について考察しよう．係員は n 人であるとする．自動車の到着をランダムと考えて，任意の時刻 t と t+h の間に一台の自動車が到着する確率は $\lambda h+o(h)$ (oh) は h より高位の無限小をいみする）であり，二台以上の自動車が到着する確率は o(h) であると仮定する．到着が出生であり，サービス（料金払）を終つて車が出発するのが死滅である。関門に止つている（実際には徐行しているかもしれないが）車の数が現在人口というようなわけである．サービスもランダムと考えて，時刻 t にサービス中の車が t+h までにサービス終了となる確率は $\mu h+o(h)$ であると仮定する．

* 堺市百舌鳥東之町，工業経営学教室

** 文献では例えば経営数学講座，待合せ理論の頃参照（みすず書房）近刊。

関門に i 台の自動車が止つているとき，$i\leqq n$ ならば全部サービス中であり，$i>n$ ならば（$i-n$）台だけが順番待ちをしている。i 台の自動車が止つている状態を E_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で表わし，時刻 t に状態が E_i である確率を $P_i(t)$ で表わす．時刻 t+h に状態が E_i であるのは，

（i）時刻 t に E_i であり，t と t+h の間に車が到着せず，サービスも終了しない．その確率は $P_i(t)$ $(1-\lambda h-o(h))$ $(1-[\min(i,n)]\mu h-o(h))$

（ii）時刻 t に E_{i+1} であり，t と t+h の間に車が到着せず，サービスが一個終了する．その確率は $P_{i+1}(t)$ $(1-\lambda h-o(h))$ $([\min(i+1,\ n)]\mu h+o(h))$

（iii）時刻 t に E_{i-1} であり，t と t+h の間に車が一台到着し，サービスは終了しない．その確率は $P_{i-1}(t)$ $\lambda h+o(h))$ $(1-[\min(i-1,\ n)]\mu h-o(h))$

以上のばあいの他は確率 o(h) である。 したがつて，

$$P_i(t+h)=P_i(t)-(\lambda+[\min(i,\ n)]\mu)hP_i(t)+[\min(i+1,\ n)]\mu hP_{i+1}(t)+\lambda hP_{i-1}(t)+o(h)$$

ここで $P_i(t)$ を左辺に移項し，h で除して $h\to o$ とすれば，

$$P_i'(t)=-\ (\lambda+[\min(i,\ n)]\mu)P_i(t)+[\min(i+1,\ n)]\mu P_{i+1}(t)+\lambda P_{i-1}(t)$$

定常解を考え，$P_i'(t)=o$, $P_i(t)=P_i$ $(i=0,1,2,\cdots)$ とすれば，

$$\left.\begin{array}{l}\lambda P_o=\mu P_1\\(\lambda+i\mu)P_t=(i+1)\mu P_{i+1}+\lambda P_{i-}i=1\\\qquad\qquad(i=1,2,\cdots,n-1)\\(\lambda+n\mu)P_i=n\mu P_{i+1}+\lambda P_{i-1}\\\qquad\qquad(i=n,\ n+1,\ \cdots\cdots\cdots\cdots)\end{array}\right\}\ (2,24)$$

これを順次とけば

$$P_i=P_o\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i(i=o,1,n-1),$$

$$P_i=P_o\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{i-n}\ (i=n,n+1,\cdots\cdots)\quad\cdots\cdots\ (2,25)$$

$P_0, P_1, P_2, \cdots\cdots$ は確率であるから，$P_0+P_1+P_2+\ \cdots\cdots=1$ とおいて，$\lambda/n\mu<1$ ならば，

$$P_0=1/\left[1+\frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}+\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{1-\lambda/n\mu}\right]\quad\cdots\cdots(2,26)$$

到着に関する前の仮定は到着時間間隔が平均値 $(1/\lambda)$ 秒の指数分布にしたがい，サービスに関する前の仮定はサービス時間が平均値 $(1/\mu)$ 秒の指数分布にしたがうことを示しているから（前掲書参照），1秒当り平均 λ 台の自動車が到着し，1秒当り平均 $n\mu$ 台の自動車を処

理しうる．それゆえ $\lambda/n\mu \geqq 1$ ならば，自動車はたまる一方なので定常解は存在しないのである．

平均の行列の長さをL（台）とすれば，

$$L=1\cdot P_{n+1}+2\cdot P_{n+2}+3\cdot P_{n+3}+\cdots\cdots$$

$$=P_0\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{\lambda}{n\mu}\Big/\left(1-\frac{\lambda}{n\mu}\right)^2\cdots\cdots(2.27)$$

例として1人の医者が平均1時間に6人の患者を診ることができ，患者は平均1時間に5人来るとすれば，上の仮定を適用して計算すれば，$n=1$，$\lambda/\mu=5/6$であり，$L\fallingdotseq 5$，大体平均して5人待つことになる．一般にサービス係数とよばれる $\lambda/n\mu$ の値が1に近くなると急激に平均行列長Lは増大する．したがつてORでは，行列が出来ることによる損失とサービス係員の遊休率（自動車が来ないので手の空いている時間を実働時間で除したもの）などをにらみあわせて，最適の処理機構設計をおこなう．

上述の指数分布の仮定は，到着時間間隔やサービス時間に対する仮定としては最もランダムネスの強い仮定であり，したがつて実際のばあいに比してLを大きく算出する．これ以外の分布をなすばあいや実際の待合せ時間に関する多くの研究がある，この問題は所謂酔歩(random walk）の問題とも密接な関係があり，これを利用して解析的な研究が難しいばあいにはモンテカルロ法を使うこともできる．また直接サービス系のシミュレーション（simulation）をおこなうこともある．応用としては荷役や飛行場での輻輳の軽減，在庫管理の問題，機械修理工場の規模の決定など種々の分野がある．

2.6 組合せ計画法（Combinatorial programming）

組合せ計画法は，いくつかのものの組合せ(combination)あるいは順列（permutation）のなかから，問題に応じた判定条件によつて最適のそれを求める数学的方法である．20個のものの順列でさえ20! もあり，一つ一つを評価するのに10秒かかるとしても，すべてをつくすには神武以来毎日々々計算しても今日まだ解答がでないのである．このような問題に対して極めて能率的な解法を提供するのが組合せ計画法の目的である．

n都市を一つから出発して全部一度づつ訪問し，もとの都市にかえつてくるという所謂巡回セールスマン（travelling salesman）の問題もこの中に入るが，それは次のようなものである．n都市を1, 2, •—, n とし都市 i から j に行く費用を C_{ij} とするとき，都市1から出発するとして総費用

$$C_{1i_1}+C_{i_1i_2}+\quad+C_{i_{n-1}i_n}+C_{i_n1}$$

を最小にする順列$1\,i_1i_2\cdots i_n$ を求めよ．

現在の組合せ計画法にとくに有用な道具は工学の分野ではよく知られている線系の理論（theory of linear graph）と記号論理（symbolic logic）である．工学の分野では，たとえば前者は回路のトポロジー *として，後者は開閉回路えの応用** として知られているものである．ここでは輸送問題（transportation problem)*** を例にとつて組合せ計画法の方法を例示することにしよう．

輸送問題とは次のものである：mケの倉庫1, 2,…,mと nケの都市 1, 2,…n があつて，倉庫 i には商品 a_i ケ入つており，都市 j は b_j ケほしい．総在庫$\sum_i a_i$＝総需要$\sum_j b_j$ であり，倉庫 i から都市 j に1ケ送る費用は C_{ij} 円である．最小輸送費の計画如何．

この問題は一見線型計画法の問題であるようにみえる．事実そうであるが，以下でわかるように，これは輸送ルートの組合せだけできる問題であるから，組合せ計画法の対象であり，実際線型計画法が実用に至る外にとかれていたのである．

上の輸送問題にふぞくする線系は第2.1図のものである．$P_1, P_2, \cdots P_m$ なる節点（node）は倉庫を，$Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ なる節点は都市を示す．$\overrightarrow{P_iQ_j}$なる枝（arc，あるいは branch）は倉庫 i から都市 j に向う輸送ルートを示している．$\overrightarrow{P_iQ_j}$ なる輸送ルートに沿う輸送量をx_{ij}（x_{ij}は非負の整数）で表わすことにしよう．

一般に最適ではないが一つの計画を次のようにつくる．P_1 からQ_1 に$\overrightarrow{P_1Q_1}$を通して送れる商品は a_1 ケ以下，b_1 ケ以下である．この小さい方 min （a_1, b_1）をとり，たとえばそれが b_1 とすると，b_1 だけ送る．Q_1 の需要は満されたが，P_1 にはまだ a_1-b_1 だけ残つているから，これは Q_2 以下にふりむける．いま a_1-b_1 と Q_2 の需要 b_2 をくらべて b_2 の方が大きければ，a_1-b_1 は全部 Q_2 に送る．これで P_1 にはもう何も残つていないから P_2 にうつる．このようにすれば実際に使う輸送ルートは第2.2図のように木（tree）をつくる．$\sum_i a_i=\sum_j b_j$ であるから，倉庫は空，各都市の需要はみたされている．木とはその枝が閉路（loop）を作らないからそうよぶのである．

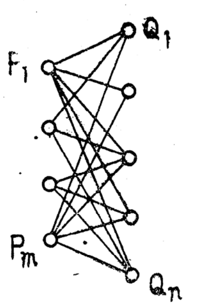
いま上の木にない一つの枝$\overrightarrow{P_2Q_1}$ を考えてみよう．このルートを付加すると第2.3図太線で示したような閉路

---

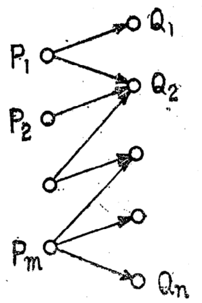
* 現代応用数学講座，回路のトポロジーの項参照（岩波書店）

** 通信工学を学ぶための数学（電気通信学会）

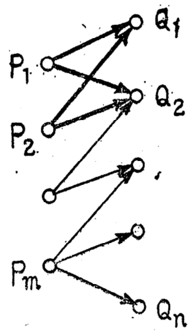
*** F.Hitchcock, "Distrilrition of Products," J.Math. Phys. Vol. 20, 1941.



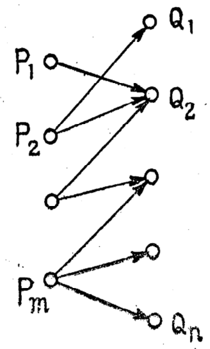
第1・2図



第2・2図



第2・3図



第2・4図

ができる．$\overrightarrow{P_2Q_1}$に沿う輸送量 x_{21} を零からませば，倉庫は空，都市の需要はちようど満されているから，$\overrightarrow{P_1Q_1}$に沿う輸送量 x_{11} は $x_{11}-x_{21}$に，$\overrightarrow{P_1Q_2}$に沿う輸送量は $x_{12}+x_{21}$ に，$\overrightarrow{P_2Q_2}$に沿う輸送量は $x_{22}-x_{21}$ に変更しなければならない．このとき輸送費用は

$$C=C_{21}-C_{11}+C_{12}-C_{22}$$

だけふえる．したがつて $C<O$ ならば，新しいルート $\overrightarrow{P_2Q_1}$ を使用する方が有利である．各ルートの輸送量は負になつてはいけないから，x_{21} は $\min(x_{11}, x_{22})$ までふやせる．いまこの最小が x_{11} であるとしよう．$x_{21}=x_{11}$ とすれば，実際に使うルートは第2.4図のようになる．これまた木である．しかも輸送費は前より$|Cx_{21}|$だけ低減する．C_{ij} が整数で与えられている（一般には有理数でよいが），1（円）以上輸送費は下る．輸送費がいくらでも低くなることはないから，このように各段階の木に対して $C<O$ なるルートを見つけて費用を低くしていつても，いつかは $C<O$ のルートが全く存在しない計画に到達する．このときには，どのルートを新たにとつたら輸送送費はそれ以上安くはならない．したがつてこれが最適解である．

以上の論拠は線系の若干のかんたんな性質，（i）木の任意二節点を結ぶ枝を付加すれば，一つそして唯一つの閉路が生ずること，および（ii）この閉路の任意一つの枝をとりさつても残りは木であることに依存している．このように組合せ計画法は若干の位相的性質や，記号論理におけるような抽象代数的性質を応用して能率的な方法を開発しつつある．

2.7 ORの事例—航空機用レーダーの信頼度*

ここにのべるORの事例は米国軍隊でおこなわれたものであり，ORの典型というわけではないが，簡潔でわかりよいので選んで紹介する次第である．

近時複雑な電子装置の信頼度が重要な問題になつてきている．これはとくに航空機やミサイルについてはきわめて深刻な問題である．というのは本節の所論から明らかとなるように，同じ機器でもそれがオペレートされる環境条件によつて大きい影響をうけ，航空機のようなものではこの条件がきわめてきびしいからである．そのために近頃は電子工学でも“物理系の信頼度”が一つのテーマになつてきたほどである．**

物理系は成分（component）の破損によつてその機能を失う．この破損には三種類のものが考えられる．すなわち一つは初期の破損であり，ふつうのものは磨滅破損であり，最後にここで重要なものは偶発的な破損である．

初期の破損は製造中のあやまりや運搬に当つての破損などで，系に投入される以前の破損であり，これは検査などによつて防ぐことができる．磨滅破損は成分の疲労にもとずいて寿命がつきるという破損で，一番ふつうのものである．第2.5図はある乾電池のそれを示すものであり，平均寿命をτ，その標準偏差を σ とすれば，t と $t+dt$ の間に寿命がつきる確率は周知の正規分布

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(t-\tau)^2}{2\sigma^2}}dt$$

で表わすことができる．このばあいには予めよゆうを以て破損を予知し，とりかえることができるのである．最後の偶発的な破損は衝撃というような，はげしい，予知し難い，しかもさけえない応力の結果おこるものであり，したがつて偶発的破損の発生率は環境条件のきびしさにより決定される．しかし，一定の条件のもとでは破損の発生率は一定である．つまり系に投入されオペレーションに入つてから時間 t まで正常であつた成分が時

* D.M. Boodman, “The Reliability of Airborne Radar Equipment,” Jonrnal of the Operations Research Society of America, Vol.1, 1953.

** 三根久，“信頼度についての一考察”，電気通信学会インホメーション研究専門委員会資料，1958.

間 t+h までに破損する確率は，tに無関係に

$$\mu^{h+o}(h)$$

である．μ は成分と環境条件により定まる定数である．そこで時間 t まで破損しない確率を P (t) とすれば，第1章で発見の確率を求めたと同様にして

$$P\ (t+h)\ =P\ (t)\ (1-\mu h-o(h))$$

P (t) を左辺に移項し，h で除して $h\to o$ とすれば，$P'(t)=-\mu P(t)$ をえ，これより $P(t)=Ce-\mu t$ をうる．P (o) ＝1より C＝1であり

$$P\ (t)\ =e-\mu t \qquad (2.28)$$

すなわち平均値 $(1/\mu)$ の指数分布にしたがうわけである．第2.6図はある航空機レーダーの一つの型の真空管の Pt を示したものである．ある1,400時間の平均寿命を示した真空管が地上では 10,000～18,000 時間ももつたという事実は航空機レーダーの悪条件を端的に示すものである．

大づかみに，レーダーはTケの真空管とCケの他の成分からなるものとする．真空管 1ケの μ を μ_T，他の成分1ケの μ を μ_C で表わせば，綜合してレーダーの μ は

$$\mu=\mu_T T+\mu_C C \qquad (2.29)$$

であり，この μ を用いてレーダーが t 時間以上正常のまゝオペレートする残存確率が (2.28) で表わされるわけである．真空管については時間当り破損率0,07%，他の成分については0.02%とすれば

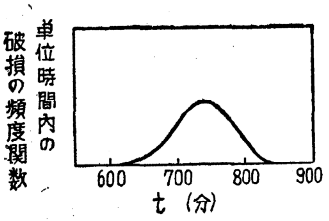
$$\mu_T=0.0007,\quad \mu_C=0.0002$$

である．第2.7図はあるレーダーの信頼度すなわち残存確率と実測値を比較したものである．

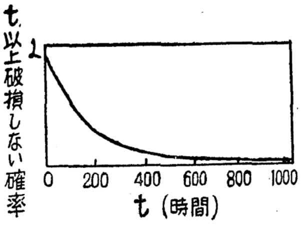
この計算によればあるレーダーが2時間の仕事に耐える確率は60%であり，5時間の仕事に耐える確率は30%にすぎないことがわかつた．この結果は新しい型のレーダーの規模を決定するのにとり入れられたのである．

人工衛生が軌道にのるまでの衝撃をうける短かい時間の制御系の残存確率はどれ位あるのであろうか．電子工学の研究にたずさわる人間には興味深いことである．

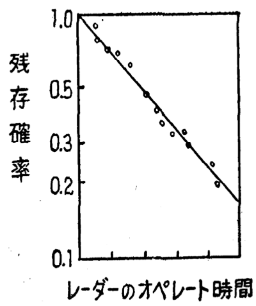
(第2章3)



第2.5図



第2.6図



第2.7図

学内ニュース

工学部新館工事進む 研究室移転始る

阪大工学部では東野田学舎の充実を計るため昨年より高層建築による講義室，研究室の増設を進め先ず構内東北側に2号館A棟（5階建・805坪）の建築を進め去る7月第一期工事の完成を見，引き続き第二期工事に着手34年にはA棟学舎の竣工を遂げる予定である．35年よりは2号館B棟の建築に着手するがこれは3階建・1200坪の予定であつてこれにより講議室は相当増加し枚方学舎との分離講議の不便も著しく緩和されることとなる．なおA棟第一期工事完成により在来本館にあつた電気，通信学科が新館に移転を完了，そのあとに構築，精密工学科の外講議室が移転を進めている．

学生ホール新築

工学部東野田学舎内の学生ホールはバラックの頗る粗末なものであるが衛生の面より見ても種々欠陥があるのでいよいよ改築に決定し10月より着工来年2月には開館の予定で工事を急ぐこととなつた．新ホールは鉄筋コンクリート建55坪で食堂の外喫茶，談話室，ピンポン，マージャン等の娯楽室，売店が設けられる．なお敷地は現在の食堂跡としいまの食堂等は一時他に移転する筈．