グラフ理論解説 （その1）

大阪大学工学部　尾　崎　　弘

グラフ理論は位相幾何（トポロジー，topology）の一分野で従来，電気回路理論に応用されてきた際，位相幾何の応用という名が用いられてきた．最近ではグラフ理論の応用という名の方が多く用いられるようになり，応用方面も通常の電気回路網のほか通信網（交通網なども全く同じ），スイッチング回路網その他多方面に広がりつつあり，昨年の9月東京で開かれたURSI（union radio-scientifique international）でも特に取上げられた．本文はグラフ理論とは何か，またどのように応用されているかについて，やさしく解説することを試みたもので，頭の体操といった気持でよまれたい．

1．グラフ理論とは何か

1．1 簡単な例

はじめに簡単な例をグラフで考えることから始めよう．

（例1）．いま次のような“なぞなぞ”を考えよう．

（i）　Aの父はCの息子である．

（ii）　DはBの祖父の兄弟である．

（iii）　Cの子供は2人である．

（iv）　DはAの父と兄弟である．

AとBの関係は何か．

こんな問題が与えられたら誰でも，図1．1のようなグラフを書き始めるに違いない．図1．1の(a)は（i）から，(b)は(ii)から，(c)は(iii)と図(a)から，(d)は(iv)と図

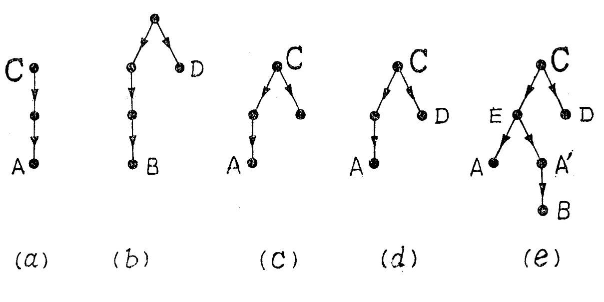


図1．1　例（1）のグラフ

(c)から，図(e)は図(d)と(b)を組合せたもので，これから答は明らかに次のようになる．

”AはBの叔(伯)父か，または父である„

図1．1の(e)で点AやBを**頂点**（vertex，電気回路では**節点**ともいう．）といい，線AEやCE等を**辺**（edge）という．このように，辺と頂点からできている図形を**グラフ**という．特にこのグラフの辺には方向がついているので，**方向のあるグラフ**（oriented graph）という．

（例2）．いま6大学の野球リーグ戦を考える．各大学をT，W，G，C，SおよびDとする．また，各校は互に1回だけ戦うものとする．リーグ戦が始ってから何週間かたって，すでに終った組合せもあれば，まだ終っていないものもある．いま

TはG，C，Dと戦い終了．
WはS，Dと戦い終了
GはT，C，Dと戦い終了，
CはT，G，Sと戦い終了．
SはW，Cと戦い終了
DはT，W，Gと戦い終了．

となったとする．これをわかりやすいように図で表わすと図1．2の(a)のようになる．

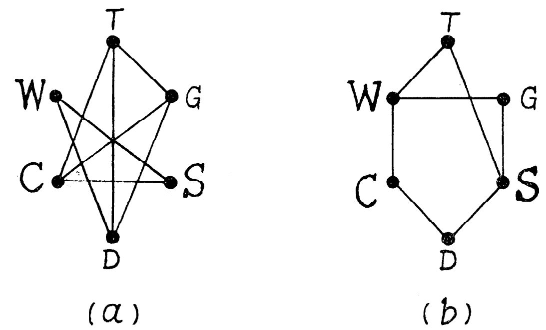


図1．2　例（2）のグラフ

いうまでもなく，T，W等を点で表わし，戦の終っている場合に線で結んである．これもグラフである．このグラフには方向がついていないので，**方向のないグラフ**（non-oriented graph）という．図1．2の(b)は戦のまだ終っていない組合せで，このグラフを図(a)のグラフの**補グラフ**（complement）という．図(a)と図(b)のグラフを合わせると図1．3(f)のようになる．このグラフを**完全なグラフ**（complete graph）という．すなわち，完全なグラフとは，どの2個の頂点も，必らず1本の辺で結ばれているものである．図1．3は，頂点が1～6個の場合の完全なグラフを示す．

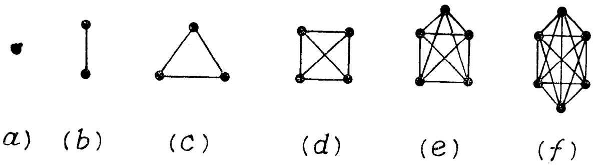


図1・3　完全なグラフ

次にプロ野球のように，年間何回かを戦うような場合は，図1・4 (a) のように，それだけの本数の線を引いてもよいし，図のように，線は1本引くだけであるが，**multiplicity**，（**重複度**と訳しておこう）を書いてもよい．

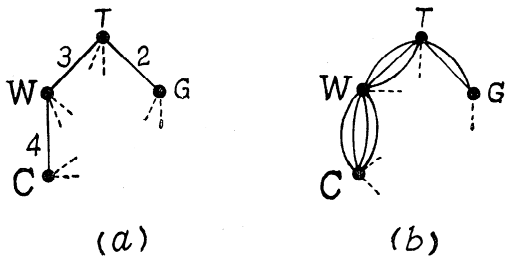


図1・4　グラフの multiplicity，部分グラフ

この二つの例題から，グラフのもつ著しい性質をあげてみよう．まず辺の長さや形（曲線か直線か）はどうでもよい．たとえば図1・4 (b) の辺TWは，長くても短かくてもよいし，直線でも曲線でも同じことである．折れた線でもいいのではあるが，折れ目が頂点であるような錯覚をおこすのでやめた方がよい．つぎに，辺の長さがどうでもよいのであるから，たとえば図1・5の (a)と (b) のように全体としての形が変っていても同じである．グ

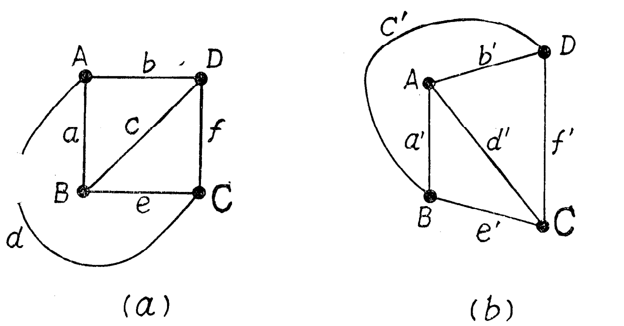


図1・5　同形，図中の a，b 等は辺の名前

ラフで重要なのは，頂点と辺とが，どういうぐあいにつながっているかということである．この性質は位相幾何全般についていいうることである．(グラフ理論は位相幾何の一部門)

図で，辺aは頂点AとBを結んでいる．このとき辺aはAに（Bにも同様） **incident**（**入射している**と訳しておこう）であるという．

（例3）．表1.1は4都市間の通信線路の数を表わす表とする．これをグラフで表わすと図1.6のようになる．なお表1.1ならびに図1.6は道路網や鉄道網を表わすときも同様になる．

表1・1

都市間	通信線路の数
大阪—京都	8
大阪—神戸	12
大阪—名古屋	5
京都—神戸	4
京都—名古屋	3
神戸—名古屋	2

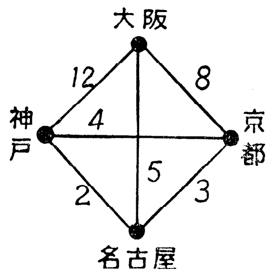


図1・6　通信網．交通網

表1.1のようなものが与えられると図1.6のようなグラフを書くことができるから，次のようなことが一般にいいうる．

（**グラフ理論の公理**）いまMを任意の集合とし，Mに属する任意の一対の元（a, b）に対して非負の整数 M_{ab} $=M_{ba}$（0のものがあってもよい）が対応し，任意の元aに対して少くとも1個の M_{ab} が0でいなならば，元a, b 等を頂点とし，M_{ab}を辺とするグラフGを作ることができる．

図1・6は図1・5の (a) や (b) と同じ形である．これを**同形である**（isomorphic，名詞 isomorphism）という．すなわち同形とは次のようにいうことができる．

（**同形**）2個のグラフGと G′ において，GとG′の各辺の間ならびに頂点の間に一対一の対応が成立ち，辺と頂点との入射の関係も保存されているとき，GとG′は同形であるという．

図1.7の(a)と(b)も同形である．

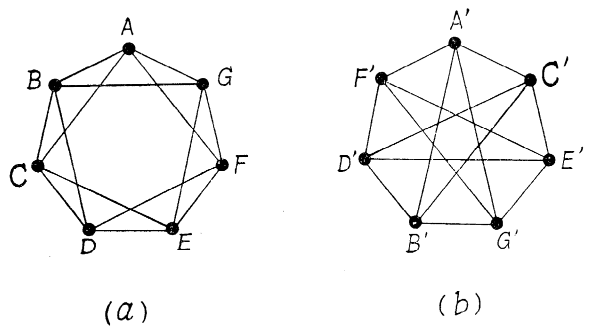


図1・7　同　形

1・2　二三の定義，

図1.8 (a) に示すグラフGに対して，同図 (b) に示すグラフ G′はその一部分である．このときG′をGの**部分グラフ**（sub graph）という．Gを自身もGの部分グラフの一つに含める．G′ のように真にGの一部分のグラフで

あるとき，**真部分グラフ**（proper sub graph）という．図1.8(a)で太線で表わした辺の集りをCからEに至る

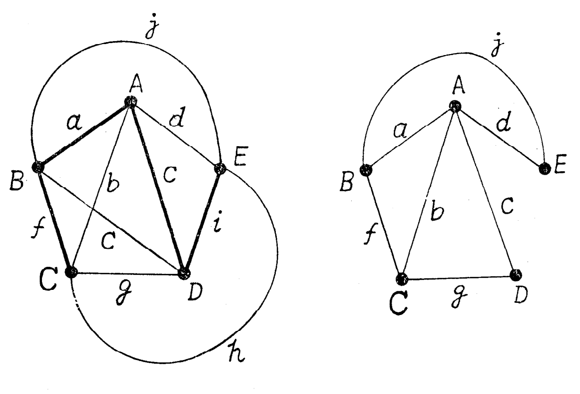


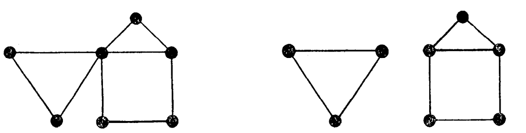
図1.8 部分グラフ，道，

道（path）という．この道は辺 f, a, c, i から成っている．これを $(f+a+c+i)$ と表わそう．CからEに至る道は外にもある．たとえば $(b+d)$, $(g+i)$, $(a+b+j)$ 等である．

なお，たとえば *faceaci* のような辺の集りは道といわず，**辺のシーケンス**（edge sequence）という．辺のシーケンスでは，ある辺を2回以上通るし，ある頂点も2回以上通っている．また，たとえば *facej* のように，ある頂点を2回以上通ることはあるが（いまの場合Bを2回通る）辺は1回しか通らない場合，**edge train** という．道の場合は，頂点も辺も1回しか通らない．

次に，図1.8(a)の太線で示した道に，辺hを加える一つのループになる．これを**回路**（circuit）あるいは**ループ**（loop）という．

図1.9の(a)のようなグラフを**つながったグラフ**(Connected graph)，(b)のようなグラフを**つながっていないグラフ**（unconnected graph）という．すなわち，



(a) つながったグラフ　　(b) つながらないグラフ

図1.9 つながったグラフとつながらないグラフ

（**つながったグラフ**）グラフGのどの一対の頂点をとっても，これを結ぶ道が必ず存在するとき，つながったグラフという．

（例4）．よく知られたパズルを考えよう．ある人が犬と羊と荷物を持って旅をしていたが，川にでくわした．川には舟が一つあって，この舟は人，犬，羊，荷物の中の二つしか乗せられない．また犬と羊だけおくと犬は羊をかむから許されないし，羊と荷物だけを残すことも許されないとする．ではどう渡せばよいか．解は何通りか．

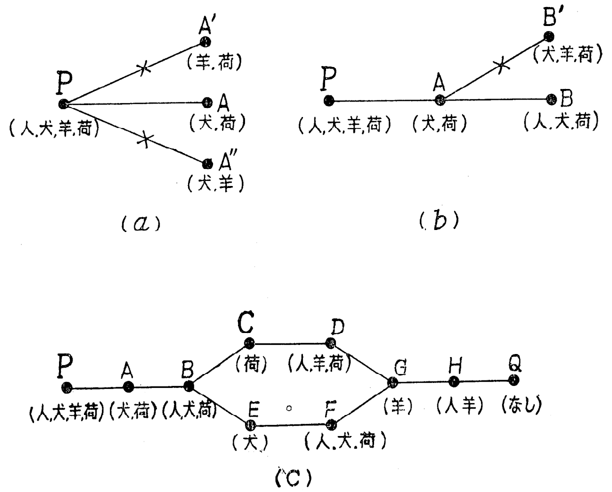


図1.10 あるパズルの解法のグラフⅠ

理解を容易にするため図1.10のようにグラフを用る．まず図(a)で，頂点Pははじめの点で，下に（人，犬，羊，荷）と書いてあるのは，はじめにこの4者が岸にいるという意味である．次に点A′（羊，荷）は，人と犬とが舟で渡り，羊と荷物が岸に残るという場合を表わす．また点A（犬，荷）は，犬と荷が岸に残り，人と羊が舟で渡るの意味である．以下同様．そうすると，先ずA′とA″は不都合である．というのは，A′のように羊と荷物は残せないから，結局Aしかない．次に図(b)で，AからはB′のようなことは不可能である．（B′というのは，向う岸から羊だけが舟に乗って帰ってくる場合）順次このようにしてあらゆる場合を書いてみると図(c)のようになる．そうすると問題は図(c)のグラフでPとQを結ぶ道が解で，そのような道がいくつかということが，解は何通りかに相当する．

次に上の問題で羊と荷物を一緒にしてはいけないという制限を取除くと図1.11のようになる．頂点A′とH′がふえ，PとQを結ぶ道は8つになる．最も早い道は図から容易に分るであろう．最も遠い道の一つは図の太線の道である．

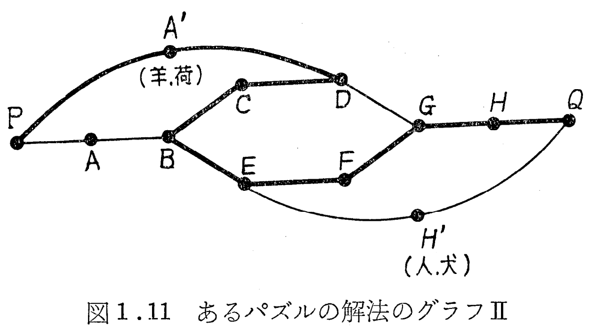


図1.11 あるパズルの解法のグラフⅡ

いままでの（例1）から（例4）までの例題，ならび

に今後のべる例題から，次のようなことがいいうる．すなわち，これらの例題はグラフを用いなくても解くことができるであろう．しかし，グラフの問題に導くと極めて考えやすくなる．また，以下に述べることからも分ると思われるが，グラフの問題に導くと，すでにグラフ理論で考え出されている定理などを，そっくり利用することができて便利である．

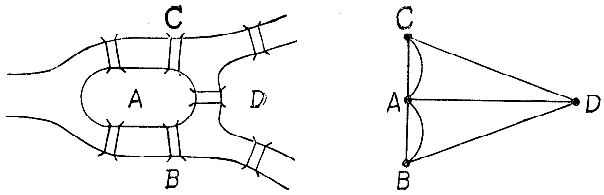
2．オイラーグラフと平面グラフ

普通，数学のある分野が何時頃発生したかは，はっきりしない．しかし，グラフ理論の発生は珍らしくはっきりしていて，オイラー(Leonhard Euler, 1707→1783)によって始められたものである．最初の論文は1736年に現われた．論文には有名な**ケーニヒスベリグ（Königsberg）の橋の問題**というのがのせられている．

2．1　オイラーグラフと一筆書き，

（例５）．ケーニヒスベルグの橋の問題，

ケーニヒスベルグの街は図２．１(a)に示すように，プレーゲル川というのが街の真中を流れていて，二つの島があり，図のように橋がかかっているそうである，ところで問題は，図のA，B，C，Dのどれかの地点から，７個の橋を全部渡って元の地点に帰って来ることができるだろうか，ということである．



(a)ケーニヒスベルグの街と橋　　(b)グラフ表示

図２．１　ケーニヒスベルグの橋の問題，

図(b)はこの問題をグラフになおしたもので，図(a)のA，B，C，Dなる地点は頂点に，橋は辺で表わしている．そうすると問題は，図(b)を一筆書きできるかどうかということになる．実はこれは不可能なのである．不可能であるという証明は簡単で，たとえば点Dを考えるに，Dには３つの辺が入射している．このように奇数個の辺が入射している点から出発して帰って来るということは明らかに不可能である．従ってグラフが一筆で書けるためには，各頂点には偶数本の辺が入射している必要がある．

一般に一筆書きで書けるようなグラフを**オイラーグラフ** (Euler graph) といい，一筆で書いた辺の列を**オイラーライン** (Euler line) という．

頂点に入射している辺の数をその頂点の**位数**(degree)という．そうすると，あるグラフが一筆書きできるためには，各頂点の位数が偶数であるということができる．実はこれは必要条件であると共に十分条件で次のような定理がある．

定理２．１，グラフGがオイラーグラフであるための必要十分条件は，つながったグラフで，各頂点の位数が偶数であることである．

（証明）いま各頂点の位数が偶数であるグラフが与えられたとする．（例として図２．２(a)を考える）どれか任意の点Pから出発して一筆きをやってみて点Pにもどってみる．図(b)は試みたグラフの一部を一筆で書いたもの

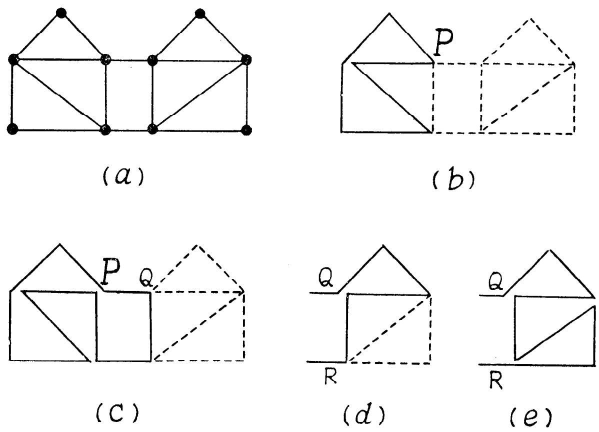


図２．２　オイラーグラフと一筆書き

である．いま書いた部分を除くと，残ったグラフ（図(b)の点線の部分）の各頂点の位数は偶数位ずつ下る．残ったグラフについて，たとえば図(b)の点Pから出発して前同様にPに帰って来る．そうして図(c)のように，前に書いた部分とつなぐ．順次このようにして図(d)，図(e)のようにくり返していくと，遂にはグラフ全体が一筆書きとなる．

オイラーラインは，ある点から出発してグラフ全体の適を通ってその点に残ってくる edge train（これを閉じた edge train という）であった．それに対して，ある点から出発して別の点に帰ってくる場合を考えると，次のようなことがいいうる．

定理２．１．系，グラフGが，ある点から出発して別の点に終るような一筆書きできるための必要十分条件は，つながったグラフで，２個の頂点の位数が奇数で，他のすべての頂点の位数が偶数であることである．

証明は簡単，２個の奇数位の頂点間に仮に１個の辺を設けると，オイラーグラフとなり，従ってオイラーラインが引ける．そこで仮に設けた辺を取去って，この２個の奇数位の頂点を始点と終点とすればよい．

また次のような定理がある．

定理2.2, 有限なグラフでは，位数が奇数である頂点の数は偶数個である.

（証明）数学的帰納法を用いると簡単である．はじめに辺を全部取去って頂点だけにし，辺を一つずつ加えていくことを考える．まず一つの辺を加えると，奇数位の頂点が2個できる．他の頂点の位数はすべて零で，零は偶数と考える．次にn個の辺を加えたとき位数が奇数である頂点の数が偶数個であったとする．これに辺一つを加えるのに，加え方に次の3通りがある.

(イ) 奇数位の頂点と奇数位の頂点の間.

(ロ) 奇数位の頂点と偶数位の頂点の間.

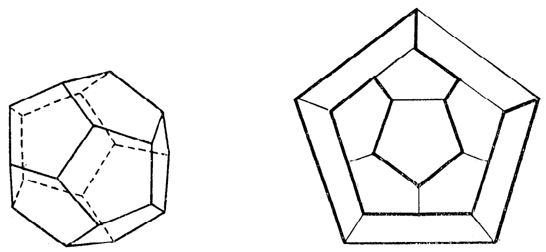
(ハ) 偶数位の頂点と偶数位の頂点の間.

(イ)の場合，2個の奇数位の頂点が共に偶数位に上り，(ロ)の場合奇数位のものが偶数位に，偶数位のものが奇数位になり，(ハ)の場合奇数位の頂点が2個生じる．いずれの場合も奇数位の頂点の数が偶数個になることに変りはない.

2.2 ハミルトンライン (Hamilton line)

(例6). **ハミルトンのパズル,**

ハミルトン (W.R. Hamilton) は 1859年次のようなパズルを出した.



(a) 正十二面体　(b) 正十二面体の変形

図2.3 ハミルトンの十二面体

図2.3に示すような正十二面体がある．周知のように十二面は正五角形で，頂点の数は20個である．ハミルトンは各頂点に都市の名前をつけた．ブラッセル，カントン，デーリ，フランクフルト等々．問題は，各頂点をちようど一回通って帰って来るような，閉じた道があるかどうかということである．このような道を**ハミルトンライン** (Hamilton line) という.

正十二面体を図(b)のように変形して考えると分りやすい．図の太線はハミルトンラインである.

ハミルトンラインとオイラーラインはよく似ている．オイラーラインでは，すべての辺を一回通る閉じた edge train であるのに対し，ハミルトンラインはすべての頂点を一回通るループである．このように二つは似ているにもかかわらず，難かしさの点では大いに異っている．オイラーグラフであるかどうかは，各頂点の位数が偶数であるかどうかを調べればよく，簡単である．しかしハミルトンラインについては，このようにきれいな定理がない.

郵便屋さんが手紙を配達するには，ハミルトンラインをたどるであろう．一般にセールスマンは，ハミルトンラインを通って顧客を廻る．また国際見本市のような，展示会や展覧会場をまわる人はハミルトンラインを通ればよい.

2.3 平面グラフ

(例7). A，B，Cなる3軒の家があって，互に極めて仲が悪く，顔を見合わせるのもいやである．一方X，Y，Z，なる3個の井戸があって，これらは，あるときはXとYが干上がり，あるときはXが干上がるといった状態である．各家庭から各井戸へ道を引くのであるが，互に顔を合わすことのないような道を引きたいと考えた．このように道を引くことは可能であろうか.

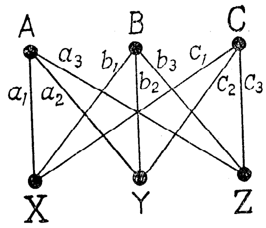


図2.4 非平面グラフの例,

この問題は，A，B，Cなる3個の点と，X，Y，Zなる3個の点に，それぞれ交叉しない線が引けるかどうかの問題である．一般に辺を交叉することなしに平面上に書けるグラフを **平面グラフ** (planar graph) という．そうでないグラフを **非平面グラフ** (non planar graph) という．上の例は非平面グラフの最も簡単なものの一つである．もう一つの簡単な非平面グラフの例は，図2.5(a)に示す頂点5個をもつ完全グラフである.

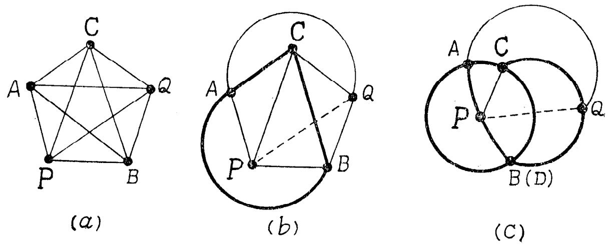


図2.5 非平面グラフの例

図(b)のように書いてみると，点線で書いた辺がどうしても交叉する.

ここで，最も基本的な非平面グラフについて述べよう．図2.6に示すように，一つの円内に線ABを，円外に線CDを引く．AとCやBとDが一致した場合が図の(b)と(c)である．AB上の一点PとCD上の一点Qを結ぼうとすれば，どうしても先に書かれている線と交叉しないわけにはいかない．これが最も簡単な非平面グラフである.

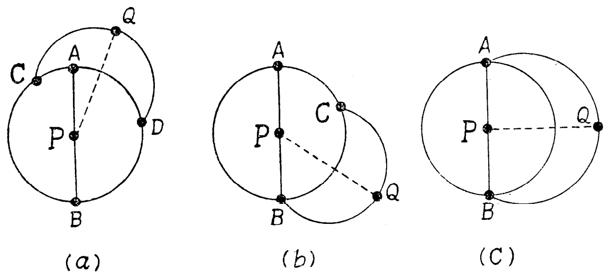


図2・6 基本的な非平面グラフ

一般に非平面グラフには，必らず図2・6のようなグラフを部分グラフとして含んでいることが示される．図2．5(a)のグラフは，同図(b)から(c)へと変形して考えると，図(c)の太線の部分グラフは図2．6の(b)と同様なグラフである．図2．4のグラフは図2．7(a)のように変

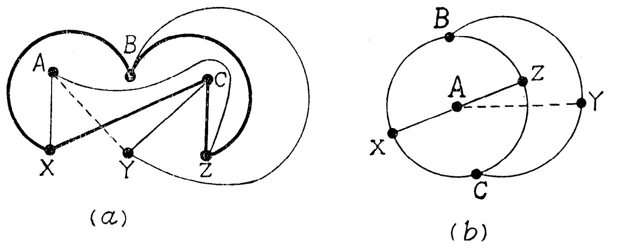


図2・7 グラフ，図2．4の変形，

形し，さらに図(b)のように変形する．図(a)の太線の部分が図(b)の円に変形されている．こうすると明らかに図2．6(a)と同形である．

参　考　書

本文はできるだけやさしくグラフ理論を解説しようと試みたものであり，これをよんで興味をもたれた方でさらに進んで勉強してみようと思われる方は，次のような書物を見ていただくとよい．代表的なものを掲げる．なお，筆者も目下グラフ理論の教科書を執筆中である．

1: O. Ore, "Graphs and Their Uses", Random House, The L. W. Singer Company, 1963. (全125頁)

この本は，グラフ理論の入門書で，応用はあまり述べていないが，短期間にグラフ理論の全ぼうを知るのによい．

2: S. Seshu and M. B. Read, "Linear Graphs and Electrical Network". Addison-Wesley Publishing company INC. 1961. (全300頁)

大学4年程度の教科書で，回路網理論への応用がよく述べられている．スイッチング回路への応用や，通信網への応用についても述べられている．

3: W. H. Kim, "Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks". Columbia Univ. Press, New York, 1962. (全300頁)

大学4年程度の教科書で，Part I から Part V に分れていている．Part I は基礎的なことと回路理論への応用，Part II はサンプル値システムに対する，いわゆる signal flow technigne の応用についてのべている．Part III は端子対回路の解析と構成，Part IV はスイッチング回路への応用，Part V は通信網への応用がのべられている．

4: C. Berge: "Theorie des graphes et ses application" Dumond, Paris, 1958, (全270頁)

英訳，A. Doig 訳 "The Theory of Graphs and Its Applications" Methuen & Co. LTD London; および John Wiley & Sons INC, New York.

前記の文献に比べて，この本が最も程度が高い．大学の研究室とか会社の研究所とかで高度にグラフ理論を応用して研究される人は是非よまれるとよい．