グラフ理論解説（その3）

大阪大学工学部　尾崎　弘

5　方向のないグラフの行列表示

これまでは，グラフを具体的な図として考えて木やカット・セットなどを図から理解してきた．この節ではグラフを抽象的に行列によって表示する方法を述べよう．

5・1　接続行列

グラフというものは，頂点と辺がどうつながっているかを記述すればそれでグラフを完全に記述したことにな

ことは明らかであろう．そこでこのような記述すれば，それでグラフを完全に記述したことになることは明らかであろう．そこでこのような記述を次のような行列によって行なう．

図5・1を例にとって，これを式（5・1）のように記述する方法を説明しよう．図5・1では各頂点を大文字のa，b，C等で，各辺を小文字のa，b，cなどで表わしてある．式（5・1）では各頂点におのおの一つの行を，各辺におのおの一つの列を対応させてあり，行列の要素は次のようにして1か0を割当てる．すなわち，辺aを例にとると，これは頂点AとBを結んでいるので，aの列のAとBの行には1を記入し，CとDの行には0を記入する，同様にbはbとCを結んでいるので，b列のbとCの行には1を記入し，その他の行には0を記入する．以下同様である．かくして式（5・1）を得る．この式は各頂点と各辺の接続関係を完全に記述しているから，図5・1のグラフを完全に記述している．式（5・1）が与えられれば容易に図5・1と同形なグラフを画くことができる．この式を**接続行列** (incidence matrix) という・すなわち

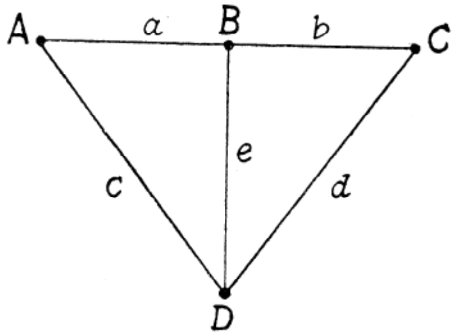


図5・1　接続行列説明のためのグラフの例

$$\begin{array}{c|ccccc|} & a & b & c & d & e \\ A & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad (5\cdot 1)$$

（接続行列） を与えられたグラフの各頂点にそれぞれ一つの行を，各列にそれぞれ一つの辺を対応させて，各要素 a_{ij} を次式で与えられるような v×e 行列 $\boldsymbol{A}_a=[a_{ij}]$ を考える．

$$a_{ij}=\begin{cases}1：\text{辺 j が頂点 i につながっているとき．}\\ 0：\text{辺 j が頂点 i につながっていないとき}\end{cases}$$

ただし，vとeはそれぞれ頂点ならびに辺の数である．このとき $\boldsymbol{A}_a=[a_{ij}]$ を接続行列という．

接続行列については次のような定理がある．

定理5・1　接続行列 $\boldsymbol{A}_a$ のどの列も2個の非零（すなわち1）の要素をもつ．

定理5・2　2つのグラフ G_1 と G_2 の接続行列をそれぞれ $\boldsymbol{A}_{a1}$，$\boldsymbol{A}_{a2}$ とするとき，$\boldsymbol{A}_{a1}$（または $\boldsymbol{A}_{a2}$）の行同志や列同志で適当に置換を行なうことによって $\boldsymbol{A}_{a2}$（または $\boldsymbol{A}_{a1}$）と一致させることができるならば，$\boldsymbol{G}_1$ と $\boldsymbol{G}_2$ は同形である．逆もまた真である．

これらの定理は明らかであろう．行をかえたり列をかえたりするということは，辺や頂点をならべかえるだけであるから．なお接続行列では，どれか一つの行をとり去っても情報は失なわれない．たとえば式（5・1）で最後の行をとり去って，

$$\begin{array}{c|ccccc|} & a & b & c & d & e \\ a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad (5\cdot 2)$$

なる式があったとする．これから元の行列を求めるには，定理5・1から，各列には必らず二つの1があるはずであるから，式（5・2）の列で，すでに1が二つあれば0を，一つしかなければ1として一つの行を作ればよい．

接続行列はグラフに関する情報のすべてを含んでいるので，以下この行列の性質について調べよう．定義から明らかなように，行列の要素はすべて0と1であるから，演算は次のような，いわゆる modulo 2の代数系で行なう*.

脚註 * $0\oplus1$ や $1\oplus1$ の $\oplus$ のことを modulo 2の加算という，これはまた．$1+1=0$ (mod2) とも書く．

$$\left.\begin{array}{l} 0\oplus 0=0,\ \ 0\oplus 1=1\oplus 0=1 \\ 1\oplus 1=0, \\ 0\times 0=0,\ \ 0\times 1=1\times 0=0 \\ 1\times 1=1\ \ (0\times 0\text{等はまた}0\cdot 0\text{と表わす}) \end{array}\right\}\quad (5\cdot 3)$$

上の諸式が成立するから，これは3・2節に述べた環になる．なお，一般に環では $ab \neq ba$ であったが，上の式の 場合は 等号が成立する． このような 場合は commutative ring という．

以下二三の計算例を示そう，いま．

$$\boldsymbol{P}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (5\cdot 4)$$

なる行列の逆行列を求めてみよう．この行列と同じ要素をもつ行列式 determinant を det $\boldsymbol{P}$ で表わし，

$$\det \boldsymbol{P}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (5\cdot 5)$$

とすると，

$$\det \boldsymbol{P}=1\times\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\oplus 0\times\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\oplus 1\times\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=1\times 0\oplus 0\oplus 1\times 1=1 \qquad (5\cdot 6)$$

このように，計算はすべて×と⊕で，それ以外は普通の場合と全く同じように行なう．

$$\triangle_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0,\ \ \triangle_{12}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\triangle_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0\oplus 1=1$$

$$\triangle_{21}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0,\ \ \triangle_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0\oplus 1=1$$

$$\triangle_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0,\ \ \triangle_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0\oplus 1=1$$

$$\triangle_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0,\ \ \triangle_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\oplus 0=1$$

したがって，

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (5\cdot 7)$$

逆行列は det$\boldsymbol{P}$=1 のときだけ存在する．

次に式（5・8）に示す行列の階数を求めるために初等変換を行なってみよう．

$$\boldsymbol{P}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (5\cdot 8)$$

上の行列を，左上方に単位列がくるように変形していくことを考えよう．まず第1行を第3行と第4行に加えると．

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (5\cdot 9)$$

a_{22}（第2列の第2行目の要素の意味）が1でないので第2列と第3列を入れかえると，

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (5\cdot 10)$$

次に第2行を第4行に加えると

$$\boldsymbol{P}_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (5\cdot 11)$$

これで a_{11}, a_{22}, a_{33} がすべて1になった．次に a_{44} 0なので，第6列と第4列を入れかえると，

$$\boldsymbol{P}_4=\left|\begin{array}{cccc:cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right| \qquad (5\cdot 12)$$

最初の4列よりなる行列

$$\boldsymbol{Q}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

をみると，対角線には1が並び，その下方の要素はすべて0であるから，det $\boldsymbol{Q}$ は明らかに1である．従って $\boldsymbol{Q}$ の階数は4であり，従ってまた $\boldsymbol{P}_4$ も $\boldsymbol{P}$ もその階数は4である．

定理5・3　つながったグラフの接続行列 $\boldsymbol{A}_a$ の階数は，たかだか（v－1）である．ただしvは頂点の

（証明）最も下の行に残りの すべての 行 を 加える．（この操作を行っても行列の階数は不変である）どの列もちょうど2個の1をもっているから，1⊕1＝0で最も下の行の要素は（v－1）個の行だけが0でない要素をもつことになり，すべてDになる．従ってこの行列は階数は（v－1）を越えない．

定理5－4　つながったグラフの接続行列 $\boldsymbol{A}_a$ に対して，どのr個（r＜v）の行の和をとっても少くとも1個の1をもつ．

これは明らかであるから証明は略する．

定理5・5　つながったグラフの接続行列 $\boldsymbol{A}_a$ の階数は（v－1）である．

（証明）$\boldsymbol{A}_a$ を式（5・13）の形に変換することを

考える．この式で横棒は0か1のいずれかのいみである．

$$
(v-1)\text{行}\left\{
\begin{pmatrix}
1 & - & - & - & \cdots & & & & - \\
0 & 1 & - & - & & & & & \\
0 & 0 & 1 & - & \cdots & & & & - \\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & & & & - \\
\cdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\
\cdots & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & - & \cdots & - \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots & 0
\end{pmatrix}\right. \quad (5\cdot 13)
$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{(v-1)\text{列}}$

この式の最も下の行の要素はすべて〇でその他の行では対角線の要素 a_{11}, a_{22} $a_{(v-1)(v-1)}$ はすべて1であり，対角線より左下の部分の要素はすべて〇である．

さて，与えられた $\boldsymbol{A}a$ の始から（v—1）個の行を最後の行に加えると，最後の行の要素はすべて〇になる．それは，始めに与えられた接続行列の各列には必らず2個の1があり，1⊕1＝0であるから．次に，第1行には少くとも1個の1をもっているから，この1が a_{11} の位置に来るように列の置換をやる．そうして第2行以下で第1列に1をもつ行があれば，その行に第1行を加えてその1を消す．こうすると，第1列は a_{11} が1で，a_{21}, a_{31},………a_{v1} はすべて0となる．定理5・4から，第2～第（v—1）行には少くとも1が1個ある．次に第2行は a_{21} 以外のどこかに1があるはずであるから，その1が a_{22} の位置に来るように列の置換を行なう．さらに第3行以下の行で，第2列に1をもつものがあれば，第2行をその行に加えて，その1を消す．この操作をくり返すと式（5・12）のような形に変換される．この行列の最初の（v—1)行，（v—1）列を取りだしてできる（v—1）×（v—1）の正方部分行列は，主対角線上の要素はすべて1で，その左下部分の要素はすべて0であるから，行列式の値は明らかに1である．従って　の階数は（v—1）である．

系5・6　つながったグラフの接続行列 $\boldsymbol{A}_a$ のいずれかの行を取除いてできた行列を $\boldsymbol{A}$ としたとき，$\boldsymbol{A}$ の階数は（v—1）である．（証明略）

5・2　閉路行列（*circuit matrix*）

前節では頂点と辺との接続関係を示す行列について述べたが，同様にして辺と閉路の関係を記述する行列を定義することができる．すなわち，

（閉路行列） 各要素 b_{ij} を

$$
b_{ij}=\begin{cases} 1：\text{辺 j が閉路 i に属するとき,} \\ 0：\text{辺 j が閉路 i に属さないとき,} \end{cases}
$$

とする行列 $\boldsymbol{B}_a=[b_{ij}]$ を**閉路行列**（circuit matrix）という．たとえば，図5・2で与えられるグラフについて考えると，閉路は3個あって，閉路1は辺（a，b，d，c）から成り，閉路2：(a，e，c)閉路3：（b，d，e）である．したがってこのグラフの閉路行列 $\boldsymbol{B}_a$ は，

$$
\boldsymbol{B}_a=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5\cdot 14)
$$

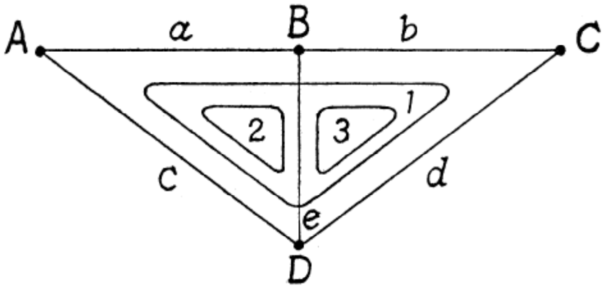


図5・2　グラフの閉路

で与えられる．ところで，前に基本閉路系を定義したが，グラフの一つの基本閉路系と辺との関係を示す行列を**基本閉路行列**といい $\boldsymbol{B}_f$ で表わす．いま，与えられたグラフにおいて一つの木Tを選んで，このTに対する（e－v＋1）個の**弦**（chord）と基本閉路を見出し，$\boldsymbol{B}_a$ の行からこの基本閉路に対応する行だけを残し他のものを除くと $\boldsymbol{B}_f$ が得られるが，この行列 $\boldsymbol{B}_f$ の第 i 行（1≦i≦e－v＋1）に対応する基本閉路に属するところの弦に対応する列を第 i 列になるように，列の置換を行なうと，$\boldsymbol{B}_f$ は次の形になる．

$$
\boldsymbol{B}_f=[\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}_{12}] \quad \boldsymbol{U};(e-v+1)\times(e-v+1)\ \text{の単位行列)} \qquad (5\cdot 15)
$$

図5・2で与えられたグラフを例にとって考える．木Tとして辺a，b，cをとると弦はd，eである，したがって基本閉路は閉路1（弦dを含む）と閉路2（弦eを含む）であるから，式（5・14）の $\boldsymbol{B}_a$ から第3行目の閉路3を取り除いて，かつ辺d，辺eを表わす第4，5列をそれぞれ第1，2列目にくるように列の置換を行うと，$\boldsymbol{B}_f$ は

$$
\boldsymbol{B}_f=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc:ccc} d & e & a & b & c \end{array} \\ \left|\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right| \end{array}
\qquad (5\cdot 16)
$$

となる．

さて，行列 $\boldsymbol{B}_a$ の性質を考えることにする．まず，行列 $\boldsymbol{B}_f$ は階数が（e－v＋1）であることが容易にわかるが，この $\boldsymbol{B}_f$ が $\boldsymbol{B}_a$ の部分行列であることを考えると次の定理が得られる．

定理5・7　つながったグラフの閉路行列 $\boldsymbol{B}_a$ の階数は少なくとも（e－v＋1）である．

接続行列 $\boldsymbol{A}_a$ と閉路行列 $\boldsymbol{B}_a$ との間に次の関係が成立

する．

定理5・8　一つのグラフの行列 $\boldsymbol{A}_a$ と $\boldsymbol{B}_a$ の列を同じ順に並べると，

$$\boldsymbol{A}_a\boldsymbol{B}'_a=\boldsymbol{0},\ \text{かつ}\ \boldsymbol{B}_a\boldsymbol{A}'_a=\boldsymbol{0}^{(*)} \qquad (5\cdot17)$$

たゞし $\boldsymbol{A}'_a$, $\boldsymbol{B}'_a$ はそれぞれ $\boldsymbol{A}_a$, $\boldsymbol{B}_a$ の転置行列を表わす．

（証明）$\boldsymbol{A}_a\boldsymbol{B}'_a$ の i，j—要素を s_{ij} とすれば，$s_{ij}=\sum_{k=1}^{e} a_{ik}b_{jk}$．$\boldsymbol{A}_a$(または $\boldsymbol{B}_a$)の第k列に対応する辺kが，$\boldsymbol{A}_a$ の第i行に対応する頂点iにつながり，かつ $\boldsymbol{B}_a$ の第j行に対応する閉路jに属するとき，かつそのときに限り，$a_{ik}b_{jk}=1$ である．したがって頂点iが閉路jに属さなければ $a_{ik}b_{jk}=0$（k＝1,2,…,e）．すなわち $s_{ij}=0$．一方，もし頂点iが閉路jに属すれば，頂点iにつながり閉路jに属する辺が2個あり，それを辺 k_1, k_2 とすれば，$a_{ij_1}b_{ik_1}=a_{ik}b_{jk_2}=1$ であり，k_1, k_2 以外のすべてのkに対して $a_{ik}a_{jk}=0$．すなわち $s_{ij}=a_{ik_1}b_{j^{k_1}}+a_{ik_2}b_{ik_2}=1+1=0$．ゆえにすべての s_{ij} は0となり（5・17）式の第1式が成立する．一方，$\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{A}'_a=(\boldsymbol{A}_a\boldsymbol{B}')'$ であるから容易に $\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{A}'_a=0$ であることがわかる．（証明終）

図5・2のグラフについてこの演算を行なうと，

$$\boldsymbol{A}_a=\begin{array}{c|ccccc|} & d & e & a & b & c \\ A & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ B & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ C & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \boldsymbol{B}_a=\begin{array}{c|ccccc|} & d & e & a & b & c \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\boldsymbol{A}_a\boldsymbol{B}'_a=\begin{vmatrix} 0&0&1&0&1 \\ 0&1&1&1&0 \\ 1&0&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&1 \\ 1&1&0 \\ 1&0&1 \\ 1&1&0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{vmatrix} \qquad (5\cdot18)$$

$\boldsymbol{A}_a\boldsymbol{B}'_a=0$ であることを利用して次の定理が得られる．

定理5・9　つながったグラフの閉路行列 $\boldsymbol{B}_a$ の階数は（e－v＋1）である．

（証明）シルベスター（sylvester）の定理によれば，m×nの行列 $\boldsymbol{P}$ とn×pの行列 $\boldsymbol{Q}$ に対して $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{0}$ であれば，$\boldsymbol{P}$ の階数と $\boldsymbol{Q}$ の階数の和はnを起えない．このことを利用して，（$\boldsymbol{A}_a$ の階数）＋（$\boldsymbol{B}_a$ の階数）≦（辺の数）が成立するが，定理5・7により（$\boldsymbol{B}_a$ の階数）≦e－v＋1，かつ（$\boldsymbol{A}_a$ の階数）＝j－1であるから $\boldsymbol{B}_a$ の階数はe－v＋1となる．（証明終）

5・3　接続行列と閉路行列の関係

接続行列 $\boldsymbol{A}_a$ はグラフに関するすべての情報を含んでいるのであるから，これから閉路行列 $\boldsymbol{B}_a$ が求められるはずである．本節では $\boldsymbol{A}_a$ と $\boldsymbol{B}_a$ との関係を調べよう．

連絡グラフの接続行列 $\boldsymbol{A}_a$ 閉路行列 $\boldsymbol{B}_a$ からそれぞれv－1，e－v＋1個の列を取り出してできた部分行列をそれぞれ $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ とする．

補題5・10　一つの閉路に属する辺に対応する行列 $\boldsymbol{A}$ の列の間には一次従属の関係がある．

（証明）閉路rについて考える．$\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{A}'_a=\boldsymbol{0}$ から

$$[b_{r1}b_{r2}\cdots b_{re}]\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}'_1 \\ \boldsymbol{A}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}'_e \end{vmatrix}=b_{r1}\boldsymbol{A}_1+b_{r2}\boldsymbol{A}_2+\cdots+b_{re}\boldsymbol{A}_e=\boldsymbol{0} \qquad (5\cdot19)$$

たゞし $\boldsymbol{A}_i$（1≦i≦e）は $\boldsymbol{A}_a$ の第i列を表わす．この閉路rに含まれる辺を i_1, $i_2\cdots i_k$ とおけば，

$$b_{ri_1}=b_{ri_2}=\cdots=b_{ri_k}=1,\ b_{rs}=0(s\neq i_1,i_2,\cdots i_k) \qquad (5\cdot20)$$

すなわち，$\boldsymbol{A}_{i_1}+\boldsymbol{A}_{i_2}+\cdots+\boldsymbol{A}_{i_k}=\boldsymbol{0}$．（証明終）

定理5・11　$\boldsymbol{A}$ のv－1次の正方部分行列が正則であるときかつそのときに限り，この行列の列に対応す辺はそのグラフの一つの木をつくる。

（証明）つながったグラフの任意の木Tに含まれる辺に対応する $\boldsymbol{A}$ の列を残し他の列を取り去った $\boldsymbol{A}$ のv—1次の正方部分行列は明らかに正則である．逆に $\boldsymbol{A}$ のv—1次の正方部分行列が正則であれば，そのv—1個の列ベクトルは一次独立である．よってその列に対応するv—1個の辺から成るグラフは閉路をもたない．しかもここで考えているグラフは連結しているから，このv—1個の辺はそのグラフの一つの木をつくる．（証明終）

このように，つながったグラフの木とそのグラフの行列 $\boldsymbol{A}$ のv—1次の正方部分行列との間のには1対1の対応関係がある．また，補木と $\boldsymbol{B}$ の正則な正方部分行列との間にはこれと双対友関係が存在する．

定理5・12　つながったグラフの行列 $\boldsymbol{B}$ のe－v＋1次の正方部分行列が正則であるときかつそのときに限り，この行列の列に対応する辺はそのグラフの一つの木をなす．

（証明）このグラフの行列 $\boldsymbol{B}$ を次のように分割する．

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{B}_{12}] \qquad (5\cdot21)$$

ここで $\boldsymbol{B}_{11}$ の各列はグラフの一つの木Tの補木をなす辺に対応し，$\boldsymbol{B}_{12}$ の各列はTの辺に対応する．一方このTに対する基本閉路行列を $\boldsymbol{B}_f$ とすると，

$$\boldsymbol{B}_f=[\boldsymbol{UB}_{f12}] \qquad (5\cdot22)$$

となる．$\boldsymbol{B}_f$ はグラフのすべての閉路の基底であるから

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{DB}_f \qquad (5\cdot23)$$

を満たす行列 $\boldsymbol{D}$ が存在する．$\boldsymbol{B}$ の階数はe－v＋1であるから $\boldsymbol{B}$ の行に対応する閉路は独立であり，したがって $\boldsymbol{D}$ は正則である．

$$[\boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{B}_{12}]=\boldsymbol{D}[\boldsymbol{UB}_{f12}] \qquad (5\cdot24)$$

＊　$\boldsymbol{0}$ は各要素がすべて0なる行列を表わす．

$$\therefore\quad \boldsymbol{B}_{12}=\boldsymbol{DU}=\boldsymbol{D} \qquad (5\cdot25)$$

ゆえに，$\boldsymbol{B}_{12}$ は正則である．

逆にｅ－ｖ＋１次の $\boldsymbol{B}$ の正方部分行列が正則であれば，それを $\boldsymbol{B}_{11}$ として，$\boldsymbol{B}$ を次のように表わす．

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{B}_{12}] \qquad (5\cdot26)$$

$\boldsymbol{B}_{12}$ にはｖ－１個の列があり，その列に対応する辺のみから成る閉路が無いことを証明する．いま，そのような閉路があったとして，この閉路に対応する列を $\boldsymbol{B}$ に加えて

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{12} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{i2}\end{bmatrix} \qquad (5\cdot27)$$

とする．$\boldsymbol{B}_{i2}$ には少なくとも１個の１があるから，それを（ｅ－ｖ＋２，ｅ－ｖ＋２）一要素へ入るように $\boldsymbol{B}$ の最後のｖ－１個の列の間で置換を行なう． すると $\boldsymbol{B}$ の最初のｅ－ｖ＋２個の行と列から成る $\boldsymbol{B}$ の ｅ－ｖ＋２次の正方部分行列は

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix} \qquad (5\cdot28)$$

となり正則となる．よって $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}_i\end{bmatrix}$ の階数はｅ－ｖ＋２となる．しかし，これは $\boldsymbol{B}_a$ の部分行列であり階数がｅ－ｖ－１ を越えないことに矛盾する．ゆえにそのような閉路は無い．（証明終）

定理５－13 つながったグラフの接続行列 $\boldsymbol{A}_a$ は常に次のように分割できる．

$$\boldsymbol{A}_a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix} \qquad (5\cdot29)$$

ここで $\boldsymbol{A}_{12}$ はｖ－１次の正則な正方行列である，このとき $\boldsymbol{A}_{12}$ の列に対応する辺から成る木に対する基本閉路行列 $\boldsymbol{B}_f$ は

$$\boldsymbol{B}_f=[\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}'_{11}\boldsymbol{A}^{-1\prime}{}_{12}] \qquad (5\cdot30)$$

で与えられる．

（証明）$\boldsymbol{A}_a$ は階数がｖ－１であるから（５・15）のような分割は常に可能である．〔定理５・11〕から $\boldsymbol{A}_{12}$ の列に対応する辺は一つの木をなし，$\boldsymbol{B}_f$ をこの木に対する基本閉路とすると，列を適当に置換して $\boldsymbol{A}_a$ の列も同一の順にする） $\boldsymbol{B}_f=[\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}_{f12}]$ とすることができる．ところで，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}'_f=\boldsymbol{0} \qquad (5\cdot31)$$

であるから，

$\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}'_{f12}=\boldsymbol{0}$，または $\boldsymbol{B}'_{f12}=\boldsymbol{A}^{-1}{}_{12}\boldsymbol{A}_{11}$，または $\boldsymbol{B}_{f12}=\boldsymbol{A}'_{11}\boldsymbol{A}^{-1\prime}{}_{12}$（証明終） (5・32)

先に示したグラフを例にとると，頂点Ｄに対応する行を取り除いて，

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ \mathrm{A}\\ \mathrm{B}\\ \mathrm{C}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\mathrm{a}&\mathrm{b}&\mathrm{c}&\mathrm{d}&\mathrm{e}\end{array}\\ \begin{vmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&1\\0&1&0&1&0\end{vmatrix}\end{array} \qquad (5\cdot33)$$

（５・５）式で与えられたこのグラフの $\boldsymbol{B}_f$ と同じ順に列を並べかえて

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{array}{c} \\ \mathrm{A}\\ \mathrm{B}\\ \mathrm{C}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc:ccc}\mathrm{d}&\mathrm{e}&\mathrm{a}&\mathrm{b}&\mathrm{c}\end{array}\\ \left|\begin{array}{cc:ccc}0&0&1&0&1\\0&1&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right|\end{array} \qquad (5\cdot34)$$

これから

$$\boldsymbol{A}^{-1}{}_{12}\boldsymbol{A}_{11}=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix}0&0\\0&1\\1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&0\\0&1\\1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&0\\1&1\end{vmatrix} \qquad (5\cdot36)$$

よって

$$[\boldsymbol{U}(\boldsymbol{A}^{-1}{}_{12}\boldsymbol{A}_{11})']=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&1&0&1\end{bmatrix} \qquad (5\cdot36)$$

これは既に与えられた（５・５）式と一致する．

５・４ カットセット行列

カットセット（cut-set）の定義は既に述べたが，ここではその行列表示について述べ，それに付随した性質を二三とりあげる。

（カットセット行列）カットセット行列 $\boldsymbol{Q}_a=[q_{ij}]$ とは，その各要素 q_{ij} を

$$q_{ij}=\begin{cases}1\text{；辺 j がカットセット i に含まれるとき，}\\ 0\text{；辺 j がカットセット i に含まれないとき}\end{cases}$$

とする行列で，各行はおのおのの可能なカットセットに対応する．例えば，図５・３の $\boldsymbol{Q}_a$ は（５・37）で与えられる。

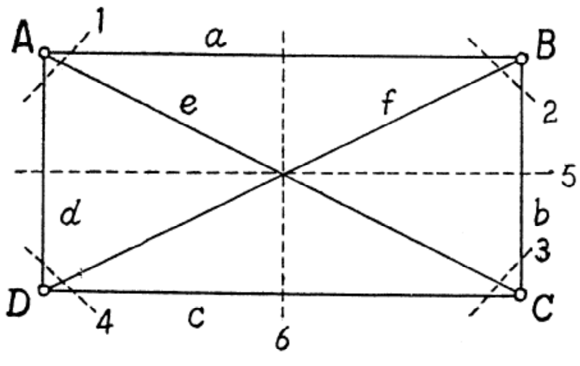


図５・３

$$\boldsymbol{Q}_a=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}\mathrm{a}&\mathrm{b}&\mathrm{c}&\mathrm{d}&\mathrm{e}&\mathrm{f}\end{array}\\ \begin{vmatrix}1&0&0&1&1&0\\1&1&0&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&1\\0&1&0&1&1&1\\1&0&1&0&1&1\\1&1&1&1&0&0\end{vmatrix}\end{array} \qquad (5\cdot37)$$

定理５・14 非可分グラフ(nonseperable graph)Ｇに

対する行列 $\boldsymbol{Q}_a$ は $\boldsymbol{A}_a$ を含み，つながったグラフGに対する行列 $\boldsymbol{Q}_a$ は $\boldsymbol{A}_a$ を含み，連結グラフGに対する行列 $\boldsymbol{A}_a$ の行はその $\boldsymbol{Q}_a$ の行の線形結合（すなわち mod 2 の和）で与えられる．

系5・15 Gをv個の頂点をもつつながったグラフとすれば，そのカットセット行列 $\boldsymbol{Q}_a$ の階数は少なくともv−1である．

定理5・16 もし $\boldsymbol{Q}_a$, $\boldsymbol{B}_a$ の列を同じ順で並べると，

$$\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{Q}'_a=\boldsymbol{0} \qquad (5\cdot38)$$

系5・17 つながったグラフのカットセット行列 $\boldsymbol{Q}_a$ の階数は多くともv−1である．

系5・15，系5・17から，つながったグラフのカットセット行列 $\boldsymbol{Q}_a$ の階数はv−1である．いま，$\boldsymbol{Q}_a$のv−1個の行から成る部分行列を $\boldsymbol{Q}$ とおくと，$\boldsymbol{Q}$の階数がv−1であれば，$\boldsymbol{A}$ のすべての行は $\boldsymbol{Q}$ の行の線形結合で表わされる．すなわち $\boldsymbol{D}$ を $(v-1)\times(v-1)$ の行列とすると，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q} \qquad (5\cdot39)$$

で表わされる $\boldsymbol{D}$ が存在する．$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{Q}$ がともにN−1個の行から成り，しかも階数がともにv−1であるからDは正則であり，

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A} \qquad (5\cdot40)$$

と表わしうる．したがって$\boldsymbol{Q}$のすべての行も$\boldsymbol{A}$の行の線形結合で表わされる．したがって，次の定理が得られる．

定理5・18 階数がv−1なる$(v-1)\times e$の行列$\boldsymbol{F}$の各行が一つのカットセットまたは辺を共有しないいくつかのカットセットに対応するための必要十分条件は

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{A} \qquad (5\cdot41)$$

である．ここで $\boldsymbol{D}$ は正則行列である．

定理5−19 $\boldsymbol{F}$ を階数がv−1の$(v-1)\times e$の行列で，かつ

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{0} \qquad (5\cdot42)$$

を満たすものとする．ただし $\boldsymbol{B}$ は閉路行列である．このとき $\boldsymbol{F}$ の各行は一つのカットセットかまたは辺を共有しないいくつかのカットセットに対応する．

このように，カッセット行列と接続行列，閉路行列との間の相互の関係がわかったが，定理5・11，5・12に対応する定理がカットセット行列についても与えられる．

定理5・20 階数がv−1でv−1個の行から成るつながったグラフのカットセット行列を $\boldsymbol{Q}$ としたとき，$\boldsymbol{Q}$のv−1次の正則な正方部分行列はこのグラフの木と1対1の対応関係にある．

最後に，基本カットセット行列 $\boldsymbol{Q}_f$ について考える．グラフの一つの木Tに注目し，その補木をなす各辺に番号1, 2, …… e−v＋1を与え，Tをなす各辺にe−v＋2，……，eと与える．つぎに，辺i（$1\leqq i\leqq e-v+1$）を含む基本カットセットをiとして，行列 $\boldsymbol{Q}_f$ の第i行をこの基本カットセットiに，第j列を辺jに対応させると，この行列 $\boldsymbol{Q}_f$ は

$$\boldsymbol{Q}_f=[\boldsymbol{Q}_{f11}\boldsymbol{U}] \qquad (5\cdot43)$$

となる．ここで $\boldsymbol{U}$ はv−1次の単位行列である．たとえば図5・3のグラフにおいてTとして辺a，c，eを選ぶと，基本カットセット2，4，5である．したがってこのグラフの $\boldsymbol{Q}_f$ は

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc:ccc} b & d & f & a & c & e \end{array} \\ \boldsymbol{Q}_f=\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \left|\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \end{array} \qquad (5\cdot44)$$

となる．

定理5・2 行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_f$, $\boldsymbol{Q}_f$ の列をTの補木の辺，Tの辺の順に対応させて，次のように分割する．

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{A}_{12}],\ \boldsymbol{B}_f=[\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}_{f12}],\ \boldsymbol{Q}_f=[\boldsymbol{Q}_{f11}\boldsymbol{U}]$$

このとき，次のような関係が成立する．

$$\boldsymbol{Q}_{f11}=\boldsymbol{A}^{-1}_{12}\boldsymbol{A}_{11}=\boldsymbol{B}'_{f12},\ \boldsymbol{Q}_f=\boldsymbol{A}^{-1}_{12}\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B}'_{f12}\boldsymbol{U}] \qquad (5\cdot45)$$

6．方向のあるグラフの行列

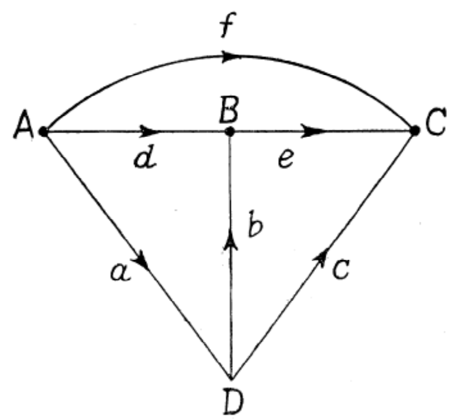
前節では，各辺が方向をもたないグラフについて考えたが，この節では方向をもつグラフについて，前と同様に接続行列，閉路行列，カットセット行列を定義し，その性質について概略する．

6・1 接続行列

接続行列 $\boldsymbol{A}_a=[a_{ij}]$ とは，各要素 a_{ij} を

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{：辺 } j \text{ が頂点 } i \text{ から出ているとき，} \\ -1 & \text{：辺 } j \text{ が頂点 } i \text{ に入るとき，} \\ 0 & \text{：辺 } j \text{ が頂点 } i \text{ に接続していないとき，} \end{cases}$$

とするv×e行列である．例えば図6，1の $\boldsymbol{A}_a$ は（6



6・1 与えられたグラフ

$$A_a=\begin{array}{c|cccccc|}
 & a & b & c & d & e & f \\
\hline
A & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
B & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
C & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\
D & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array} \qquad (6\cdot1)$$

ー1）で与ええられる．A_a に対しては前節と同様な定理が成立する．

定理6・1　つながった方向をもつグラフの接続行列 A_a の階数はｖー1である．

定理6・2　Ｔをつながった方向をもつグラフの木とすると，Ｔをつくる辺に対応する行列 A のｖー1個の列からなる A の部分行列は正則行列である．

これらの証明は方向のないグラフに対する行列と同様にして得られる．

6．2　閉路行列

方向のあるグラフの閉路行列は，辺ｊがそのグラフの一つの閉路ｉに属するか否か，およびその閉路ｉに前もって与えられた方向と辺ｊの方向が一致しているか否かを記述する．すなわち，方向のある場合の閉路行列 $B_a=[b_{ij}]$ とは，各 b_{ij} を次のように定義する．

（閉路行列）

$$b_{ij}=\begin{cases} 1：辺\,j\,が閉路\,i\,に属し方向が一致するとき，, \\ -1：辺\,j\,が閉路\,i\,に属し方向が一致しないとき, \\ 0：辺\,j\,が閉路\,i\,に属さないとき, \end{cases}$$

とする（可能な閉路の数）×ｅの行列である．例えば図

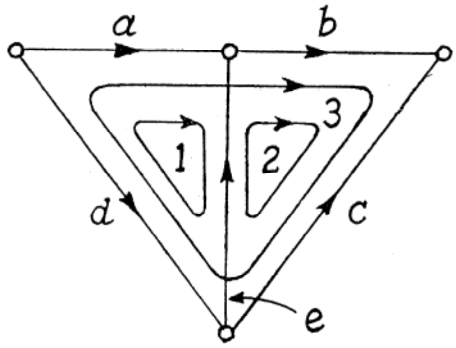


図6・2

$$B_a=\begin{array}{c|ccccc|}
 & a & b & c & d & e \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
3 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0
\end{array} \qquad (6\cdot2)$$

6・2の閉路行列は（6・2）式のように与えられる．

基本閉路行列も前節と同様に定義できる．グラフの一つの木Ｔに対する基本閉路とは，Ｔの各弦とＴの辺とのみからなる閉路でその方向を弦の方向と一致させる．したがって基本閉路行列は

$$B_f=[UB_{f12}]$$

の形に表わされる．U は前と同様ｅ－ｖ＋1次の単位行列である．閉路行列に対して次の定理が成立する．

定理6・3　A_a, B_a の列を同一の順序で並べると，

$$A_aB'_a=0,\ \ B_aA'_a=0 \qquad (6,\ 3)$$

定理6・4　つながった方向をもつグラフの閉路行列 B_a の階数はｅ－ｖ＋1である．

6，3　A_a と B_a との　関係

方向のないグラフにおけると同様に A_a の1行を取り去った部分行列を A, B_a のｅ－ｖ＋1行から成る階数がｅ－ｖ＋1の部分行列を B とする．このとき，次の定理が成立する．

定理6・5　A の ｖー1 次の正方部分行列が正則であるときかつそのときに限り，その列に対応する辺がグラフの一つの木をなす．

定理6・6　A の正則な部分行列の行列式は ±1 である．

（証明）A の任意の正則な部分行列に対して，　どの列も多くとも2個の零でない要素をもち，またどの列も2個の零でない要素をもつことはない．したがって少なくとも一列は 1個の零でない要素をもつ．この要素を a_{ij} とすれば考えている正則行列の行列式△は

$$\triangle=\pm1\cdot\triangle_{ij}\ （\triangle_{ij}：(i,\ j)-要素の余因子）\qquad (6\cdot4)$$

$\triangle_{ij}$ に対しても，同様にただ1個のゼロでない要素をもつ列があり，その列で$\triangle_{ij}$ を展開する．順次繰り返して

$$\triangle=\pm1 \qquad (6\cdot5)$$

となる．（証明終）

定理6・7　B のｅ－ｖ＋1 次の正方部分行列が正則であるときかつそのときに限り，この行列の列に対応する辺はそのグラフの一つの補木をなす．

定理6・8　行列 A を次のように分割する．

$$A=[A_{11}A_{12}] \qquad (6\cdot6)$$

たゞし A_{11} の列に対応する辺が一つの補木をなし A_{12} のそれはその木をなす．このときその木に対する基本閉路行列 B_f は

$$B_f=[U\square-A'_{11}\cdot A^{-1}_{12}{}'] \qquad (6\cdot7)$$

で与えられる．

6・4　カットセット行列

方向のあるグラフのカットセット行列は，辺ｊがそのグラフの一つのカットセットｉに含まれるか否か，かつ辺ｊがカットセットｉに前もって与えられた方向と一致するか否かの情報を与える．すなわち，方向のあるグラフのカットセット行列は次のように定義される．

（カットセット行列） $B_a=[q_{ij}]$ とは，各要系 q_{ij} を

$$q_{ij}=\begin{cases} 1\ ：辺\,j\,がカットセット\,i\,に含まれかつ方向が一致するとき, \\ -1\ ：辺\,j\,がカットセット\,i\,に含まれかつ方向が一致しないとき, \\ 0\ ：辺\,j\,がカットセット\,i\,に含まれないとき, \end{cases}$$

とする．（可能なカットセットの数）×eの行列である．

定理6・9　行列 $\boldsymbol{A}$ の各行は $\boldsymbol{Q}_a$ の行の線形結合で得られる．

定理6・10　グラフGの行列 $\boldsymbol{B}_a$, $\boldsymbol{Q}_a$ の列を同じ順に並べると，

$$\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{Q}'_a=\boldsymbol{0} \qquad (6\cdot 8)$$

定理6・11　$\boldsymbol{Q}_a$ の階数はv－1である．

一つの木に対する基本カットセットとはその木の一つ辺を含むカットセットであるが，その方向をその辺の方向に一致させると，基本カットセット行列は

$$\boldsymbol{Q}_f=[\boldsymbol{Q}_{f11}\boldsymbol{U}] \qquad (6\cdot 9)$$

で表わされる．

定理6・12　$\boldsymbol{Q}$ を $\boldsymbol{Q}_a$ のv－1個の行から成る階数がv－1の行列とすると，

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{A} \qquad (6\cdot 10)$$

ここで $\boldsymbol{D}$ は正則行列である．

定理6・13　グラフGの一つの木に対する行列を $\boldsymbol{B}_f$, $\boldsymbol{Q}_f$ とし，このグラフの行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Q}_f$ の最初のe－v＋1個の列を木Tの補木の辺に対応させ，残りをTの補木の辺に対応させ，残りをTの辺に対応させ，三つの行列の列の順序を同一にすると，

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{A}_{12}],\ \boldsymbol{B}_f=[\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}_{f12}],\ \boldsymbol{Q}_f=[\boldsymbol{Q}_{f11}\boldsymbol{U}] \qquad (6\cdot 11)$$

と表わされ，これらの間には

$$\boldsymbol{Q}_f=\boldsymbol{A}^{-1}{}_{12}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{Q}_{f11}=-\boldsymbol{B}'_{f12}=\boldsymbol{A}^{-1}{}_{12}\boldsymbol{A}_{11} \qquad (6\cdot 12)$$

なる関係が存在する．

グラフ理論解説（その1）正誤

(1964年11月号)

①　6頁右の欄の下から6行目以下を次のように訂正します．

「図2・6(a)に示すように，一つの円内に線 AB を，円外に線 CD を引く．AB 上の一点Pと，CD 上の一点Qを結ぼうとすれば，どうしても先に書かれた線と交叉する．これが最も簡単な非平面グラフの一つである．図2・6(b)は図(a)のBとDが一致した場合で，このときPC と AQ なる辺があるときはやはり非平面グラフである。」

②　また図2・6を次のように訂正する．

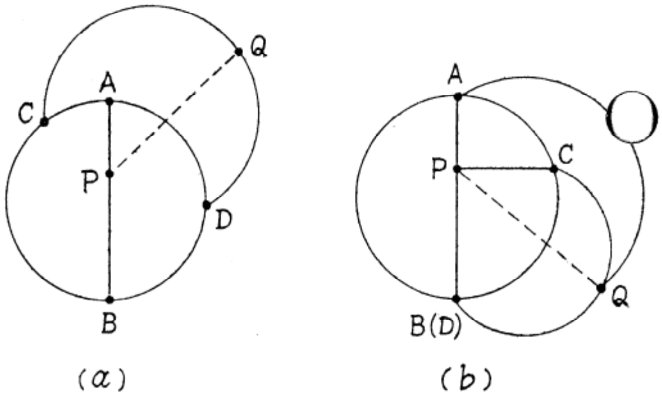


図2・6　基本的な非平面グラフ