研究ノート

マトリックス構造解析法の実用化

林　　　　　正*

構造物の解析に電子計算機が使用されるようになってすでに30年近くになり，この間における有限要素の開発と相まって，線形問題はもとより非線形問題も保存力系についてはほとんど解析できるようになった．しかし，有限要素法により実際の土木構造物の非線形解析を行えば，現在の超大型電子計算機を用いても数時間，または数十時間の演算時間を要するために，複雑な構造物の全体解析を行うことは不可能に近い．

そのために，近年では計算量を減らすことを目的とした新しい有限要素モデルの開発が研究されており，その研究成果も報告されている[1)]．

このように，構造解析の精密化を目指して発展してきた有限要素法は，経済性の問題から，より実用的な解法としての研究が進められている．一般的に，実用的な解法は精度が悪くなり，実用化と精密化とは相反する場合が多い．このために，演算時間を短くするための手段として，数値解析における計算法の研究も重要な課題である．本稿では，過去数年間にわたる骨組構造物を中心とした非線形構造解析の研究において，解析精度を落さずに演算時間を短縮した手法について説明する．

連続体を解析の対象とした有限要素法，または骨組構造を対象としたマトリックス構造解析法による非線形解析では，数学的モデルは多元連立非線形方程式で表わされ，実際の構造物ではその次元数は数百元から数千元になる．この非線形方程式を種々の逐次近似解法を組合せて解くわけであるが，演算時間を短縮するためには，1回の反復計算を要する時間と反復回数を減らすことが目標になる．低次元の有限要素モデルの開発は前者に関するものであり，後者には逐次近似式の精度，数値解法の収束性などが関係する．また，数値計算における丸め誤差が，線形計算の場合とは異なり，非線形計算では演算時間に影響する．これらのことから，演算時間を短くするために以下のような手法を用いた．

1．計算式は，可能な限り解析的に定式化する．
2．非線形項には，工学的に要求される解の精度より高次の非線形項まで用いる．
3．構造物の非線形性に応じて，数種類の解法を組合せて用いる．
4．電子計算機の使用機種により，倍精度演算を用いる．

1）マトリックス構造解析法を含めて，有限要素法は電子計算機の使用を前提として発展した数値解法であるが，解析的に処理できる演算は計算機にまかせずに，可能な限り“人間の手”で事前に処理しておく．この解析的手法を用いることにより，1回の反復計算に要する演算時間が飛躍的に短くなるとともに，打切誤差が混入しないために解の収束性がよくなる．この一例として，有限帯板法による薄肉構造物の非線形解析において剛性行列の要素の値を求めるのに，数値積分に代りに解析的な式を用いたところ，全演算時間を約10の1に短縮することができた．弾塑性解析では，積分の全区間において被積分関数を一つの式で表わすことができないので，区分積分により解析的に積分値を求める手法を用いている．

2）鋼やコンクリートを用いた土木構造物では，非線形問題は有限変位で，かつ微小ひずみの問題として定式化することができる．したがって，高次のひずみの非線形項，ひずみエネル

* 林　　正（Masa HAYASHI），大阪大学，工学部，土木工学科，講師，橋梁工学・応用構造学

ギーで考えれば，ひずみの3乗以上の非線形項において4乗以上の項は高次の微小項と考えられ，この項は最終的に得られた収束解の値にはほとんど影響しない．このために，解式の定式化においてはこれらの高次項は省略されることが多いが，数値計算の収束過程では無視できない場合がある．

この最も著しい例は，構造物に種々の不安定現象が生じる場合であり，線形化された連立方程式の係数行列は，ある特定な荷重強度に対して理論的には特異行列になる．したがって，この特異点の近傍では係数行列は数値的に擬特異の状態（ill-conditioned）になるために，係数行列の要素の値のごくわずかな変化が解に著しい影響を与える．これは，計算の途中において著しい桁落ちが生じるためであり，高次項を省略した場合には，線形化された方程式の解が安定しないので非線形方程式の解は収束しない．

高次の非線形項を省略したために生じる数値的な不安定は，上述のような弾性安定問題だけではなく，安定な平衡状態が存在する場合にも起きる．この場合には，収束値は変わらず収束計算の反復回数が増大し，荷重が大きいときには解が発散することを数値実験で確かめた[2]．

3）非線形方程式を一つの解法のみで解くことは効率が悪く，解の性状に応じた解法を用いる．構造解析では，連続的に変化する外力荷重に対する平衡状態を求めることが多い．このとき，荷重が変化するにつれて非線形方程式の性質も変わり，構造物の形状や剛性によっては解の唯一性が破れて複数組の解が存在することもある．このような問題において工学的に意味のある解を確実に求めるためには，非線形固有値解析も含めた高度の計算手法が必要になる．種々の非線形解析法については省略するが[3]，非線形性が弱い場合には簡単な解法を用いて計算時間の短縮を図ることも必要である．したがって，一つの解析プログラムに数種類の解析法を組込んでおき，コントロールデータで解法を指示するか，できれば解の収束状態に応じて自動的に解法を選択できるようにしておけば数値計算の効率を上げることができる．

非線形解法の相違による解の収束性の一例を図1に示す．計算例はエラスティカの問題であり，25回の荷重段階での平衡状態を求めるのに要した Newton–Raphson 法の反復回数Nを縦軸に示した．計算値は，楕円積分による解析解と有効数字3桁まで一致させた．増分法には，変位増分法と通常用いられている荷重増分法を使用した．さらに，これらの増分法に筆者らが開発した推定増分法[4]を併用した場合の合計4通りを示した．最も標準的な解法（一番上の実線）に比べて，他の解法による効果は明らかである．

多元連立非線形方程式を解くときのもう一つの問題点は，局所的に線形化された連立1次方

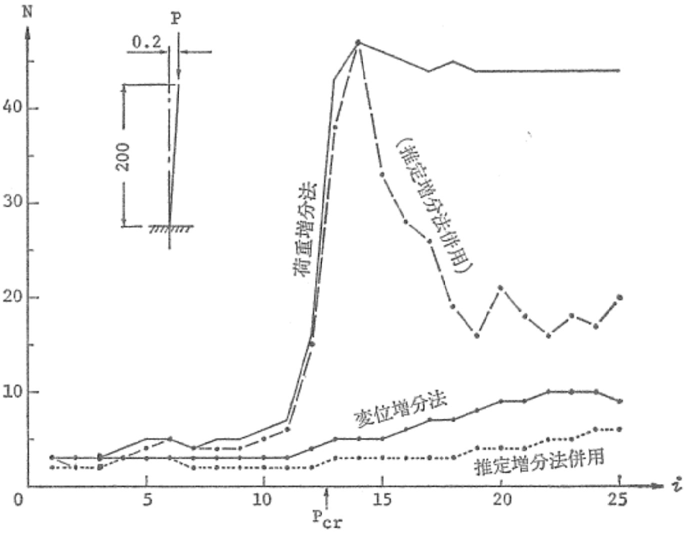

図1． 増分法の収束性

程式を効率よく解くためのサブルーチンの開発である．構造解析では，バンドアルゴリズムを用いて記憶容量の縮小と計算時間の短縮を図ることは常識的なことになっているが，数年前では各大学の大型計算機センターにはこれらのサブルーチンは整備されていなかった．現在でも，大学の計算センターのみならず，民間の計算センターでもバンドアルゴリズムを用いた変形 Cholesky 法のサブルーチンはほとんど準備されておらず，多次元の問題を扱うときには不便を感じることが多い．筆者は，線形計算に関する幾つかのサブルーチンを大阪大学大型計算機センターに登録して一般ユーザーに公開しているが[5]，数千元の固有値問題を解くことができるサブルーチンは登録されていない．線形代数に限らず，それぞれの研究テーマに応じた最適な解法のサブルーチンが計算センターになければ，各自がこれを開発するべきであり，開発を怠って他人まかせのサブルーチンを使用していたのでは数値計算の効率化は望めない．

4）最後に，一般的にはあまり認識されていない丸め誤差の影響について説明する．

土木構造物の解析では，収束解の精度は3桁で十分である．ただし，数値解の誤差評価はノルムではなく，各成分の有効桁数で評価するものとする．この3桁の精度を得るためには，計算機の内部では少なくとも5桁の精度がなければ非線形解は収束しにくい．しかるに，最近の電子計算機の有効桁数は7～8桁（ACOS-800では8.1桁）であるので，非線形方程式を線形化し，繰返し多元連立方程式を解くときには2～3桁の桁落ちが生じ，5桁の有効桁数を得ることが困難になる．このために，解は収束しても反復回数が増大することが多い．このような場合に，倍精度演算を用いれば1回の計算時間は数十パーセント増加するが，反復回数が少なくなるために総演算時間は減少する．事実，NEAC-2200 シリーズ（有効桁数10.7桁）では4～5回の反復回数で収束していた問題が，ACOS-800 では 8～9回から10回を越える場合があり，非線形性がさらに強いときには発散した例がある．この現象は，2）で述べた場合と同じような現象であり，収束解には影響しないような桁数が，安定した収束計算を行うためには必要であると考えられる．

逐次近似解法を用いた非線形解析では，以上述べたことのほかに，計算誤差が累積しないような定式化または解法を用いる必要があり，また，近似解を修正するために用いる残差（計算誤差）を正確に求めるための工夫が重要である．したがって，プログラムの開発では計算誤差に対する注意が肝要であり，同じ解式と解法を用いてもプログラムの優劣により演算時間はかなり異なる．これらの数値解析上の技巧については省略するが，あらゆる手段を駆使すれば，かなり複雑な構造物の非線形問題も解析精度を落さずに解くことができる．われわれの研究室で過去2年間にわたって研究した本州四国連絡橋の大三島橋[6]についての演算時間を示すと，平面弾塑性有限変位解析では，実橋どおりの剛性と部材配置を用いた解析モデルを約1000要素に分割して，崩壊荷重に達するまでの CPU time は数分，6000余りの要素を用いた立体弾塑性有限変位解析では数十分であった．また，数値解析と同時に行った模型実験の結果と解の精度を比較すれば，崩壊荷重は6体の試験体について1～4％の精度であった．

莫大な設計費を投入する航空産業は別として，土木の分野では上記のような解法の効率化を行えば，マトリックス構造解析法はより実用的な解法になり得るものと信じる．

参考文献

1）川井忠彦：固体力学における離散化モデルについて，第11回 JSSC 研究集会，マトリックス解析法研究発表論文集．1977．
2）前田・林：立体骨組構造物の有限変位解析，土木学会論文報告集，No. 253, 1976．
3）林　正：構造物の非線形解析における多元連立方程式の数値計算法，京都大学数理解析研究所講究録，No. 269, 1976．
4）前田・林・中村：増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法，土木学会論文報告集，No. 223, 1974．
5）林　正：プログラムライブラリーの移行登録，大阪大学大型計算機センター・ニュース，No. 30, 1978．
6）前田幸雄：本州四国連絡橋大三島橋の力学的特性の研究，生産と技術，Vol. 29, No. 1, 1977．