

境界要素法 (BEM) 入門

田中正隆*

1. まえがき

境界要素法 (Boundary Element Method, BEM と略記する) という数値解析法が, 連続体力学のあらゆる分野で, 最近多くの関心を集めている⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾. この解法は, 境界表面を要素分割するという意味において, 有限要素法 (FEM と略記する) と類似の解析法といえるが, 境界積分方程式を解析の対象とする点において基本的に異なる. FEM は変分原理などに基礎をおくエネルギー解法であるのに対し, BEM は体積分と境界積分を関係づける Green の定理に基づく解析法である. 差分法 (FDM と略記する) が支配微分方程式を階差方程式に変換するのは対照的に, BEM はこれと数学的に等価な支配積分方程式を, 境界要素を用いて節点量に関する代数方程式に変換する.

BEM では境界表面だけを要素分割すればよく, 領域全体を離散化しなければならない FEM や FDM (領域型解法) に比較して, 入力データ数や計算時間が大幅に減少することになる. 近年, FEM や FDM に基づく解析プログラムが大形化するにつれ, 計算コストの面から BEM の有用性が着目されるようになった. FEM で蓄積された計算技術を取り入れて, BEM の高精度化・高能率化が精力的に進められた結果, 連続体力学のほとんどあらゆる分野で BEM は, 領域型解法の手ごわいライバルとなっている. また, 最近では, パソコンなどの小型コンピュータの改良普及により, ハンディな計算で問題进行处理したいという技術者の要望が強まり, これに適した解析法として BEM の研究が一段と活発になってきている.

本稿では, はりの曲げ問題とラプラス微分作

用素で表わされるポテンシャル問題を例にとって, BEM の基礎について解説する.

2. はりの曲げ問題

BEM では, 問題の支配微分方程式をこれと等価な積分方程式に変換して解析する. BEM のこの基本的な考え方を説明するために, 常微分方程式で表わされるはりの曲げ問題を例にとって考察してみよう.

曲げ剛性が EI である真直はりの静的曲げ問題 (図1) は, 中立軸のたわみを w とするとき, 次式で表わされる.

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q \quad \dots (1)$$

ここで, q は単位長さ当りの分布荷重である. いま, δ を Dirac のデルタ関数として

$$EI \frac{d^4 w^*(x, y)}{dx^4} = \delta(x, y) \quad \dots (2)$$

で定義される 2 点関数 $w^*(x, y)$ を導入する. 関数 $w^*(x, y)$ ははりの静的曲げ問題の基本解と呼ばれ, 点 x に単位荷重が作用するときの点 y のたわみを表わす. この基本解 (影響関数と呼ばれることもある) は後述のように, 真直はりばかりでなく他のいくつかの例について知られている.

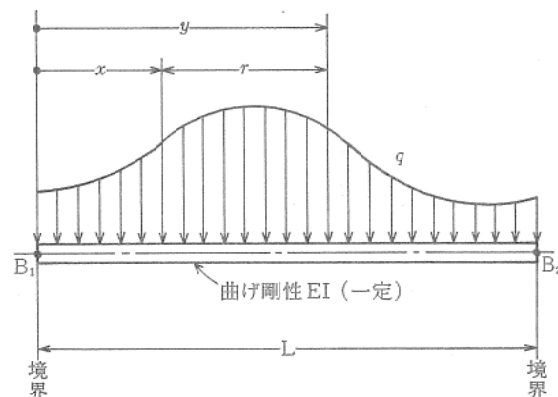


図1 はりの曲げ問題

* 田中正隆 (Masataka TANAKA), 大阪大学工学部, 機械工学科, 工学博士, 材料力学

はりの曲げ問題に対する直接法(Direct Method)と呼ばれる定式化では(このBEM解析法が、物理的意味の明確な変数を用いるために、最近のBEM研究の主流を占めつつある⁽⁵⁾)、支配微分方程式から導かれるつぎの恒等式から出発する。すなわち、式(1)の両辺に基本解 $w^*(x, y)$ を掛け、はりのスパン L 全体にわたって積分して得られる表示式：

$$\int_0^L EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} w^*(x, y) dx = \int_0^L q(x) w^*(x, y) dx \quad \dots (3)$$

について考える。式(3)を w についての微係数がなくなるまで、すなわち4回部分積分することにより、つぎの関係式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \left[-w^*(x, y)V(x) + T^*(x, y)M(x) - M^*(x, y)T(x) + V^*(x, y)w(x) \right]_{x=0}^{x=L} \\ & + \int_0^L w(x) \left[EI \frac{d^4 w^*(x, y)}{dx^4} \right] dx \\ & = \int_0^L q(x) w^*(x, y) dx \quad \dots (4) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{dw(x)}{dx}, \quad M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \\ V(x) &= -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \quad \dots (5) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} T^*(x, y) &= \frac{dw^*(x, y)}{dx}, \\ M^*(x, y) &= -EI \frac{d^2 w^*(x, y)}{dx^2}, \\ V^*(x, y) &= -EI \frac{d^3 w^*(x, y)}{dx^3} \quad \dots (6) \end{aligned}$$

である。式(4)がはりの曲げ問題に対応するGreenの定理である。式(4)の左辺最後の項に式(2)を代入し、図2に示すようなDiracデルタ関数の性質：

$$\left. \begin{aligned} \delta(x, y) &= 0 \quad ; \quad x \neq y \text{ のとき} \\ \delta(x, y) &= \infty \quad ; \quad x = y \text{ のとき} \\ \lim_{x \rightarrow y} \int \delta(x, y) dx &= 1 \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

を利用すれば

$$\int_0^L w(x) \left[EI \frac{d^4 w^*(x, y)}{dx^4} \right] dx = w(y) \quad \dots (8)$$

となる。したがって、式(4)と(8)から、はりの任

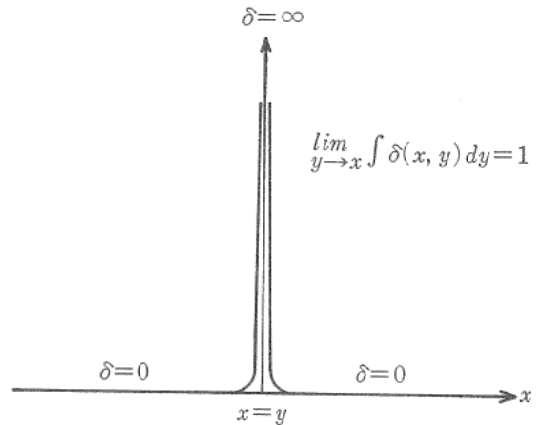


図2 Dirac デルタ関数の概念図

意点 y のたわみが求められてつぎのようになる。

$$\begin{aligned} w(y) &= \left[w^*(x, y)V(x) - T^*(x, y)M(x) \right. \\ & \left. + M^*(x, y)T(x) - V^*(x, y)w(x) \right]_{x=0}^{x=L} \\ & + \int_0^L q(x) w^*(x, y) dx \quad \dots (9) \end{aligned}$$

式(9)において、 $y \rightarrow 0$ および $y \rightarrow L$ の極限を考えると、2つの境界積分方程式が得られる。図3には、種々の境界条件を示すが、境界点 $y=0$ と $y=L$ では、 w, T, M, V のうちのいずれか2つの量が規定される。したがって、境界点の未知数が4個となり、式(9)から求められる2つの方程式だけではこれらの未知数は決定できず、あと2つの方程式が必要であることがわかる。この2つの方程式は、式(9)の両辺を y について微分して得られるつぎの関係から求められる。すなわち、

$$\begin{aligned} T(y) &= \left[\tilde{w}^*(x, y)V(x) - \tilde{T}^*(x, y)M(x) \right. \\ & \left. + \tilde{M}^*(x, y)T(x) - \tilde{V}^*(x, y)w(x) \right]_{x=0}^{x=L} \\ & + \int_0^L q(x) \tilde{w}^*(x, y) dx \quad \dots (10) \end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w}^*(x, y) &= \frac{\partial w^*(x, y)}{\partial y}, \\ \tilde{T}^*(x, y) &= \frac{\partial T^*(x, y)}{\partial y}, \\ \tilde{M}^*(x, y) &= \frac{\partial M^*(x, y)}{\partial y}, \\ \tilde{V}^*(x, y) &= \frac{\partial V^*(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

式(9)と(10)において、 $y \rightarrow 0$ および $y \rightarrow L$ の極限を考える。ε を微小な正定数とすると、つぎの関係が得られる。すなわち、式(9)より

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} w(\varepsilon) \\ w(L-\varepsilon) \end{Bmatrix} \\ = & \begin{Bmatrix} w^*(L, \varepsilon) & -T^*(L, \varepsilon) \\ w^*(L, L-\varepsilon) & -T^*(L, L-\varepsilon) \end{Bmatrix} \\ & \begin{Bmatrix} M^*(L, \varepsilon) & -V^*(L, \varepsilon) \\ M^*(L, L-\varepsilon) & -V^*(L, L-\varepsilon) \end{Bmatrix} \{X(L)\} \\ - & \begin{Bmatrix} w^*(0, \varepsilon) & -T^*(0, \varepsilon) \\ w^*(0, L-\varepsilon) & -T^*(0, L-\varepsilon) \end{Bmatrix} \\ & \begin{Bmatrix} M^*(0, \varepsilon) & -V^*(0, \varepsilon) \\ M^*(0, L-\varepsilon) & -V^*(0, L-\varepsilon) \end{Bmatrix} \{X(0)\} \\ + & \int_0^L q(x) \begin{Bmatrix} w^*(x, \varepsilon) \\ w^*(x, L-\varepsilon) \end{Bmatrix} dx \quad \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

および、式(10)より

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} T(\varepsilon) \\ T(L-\varepsilon) \end{Bmatrix} \\ = & \begin{Bmatrix} \tilde{w}^*(L, \varepsilon) & -\tilde{T}^*(L, \varepsilon) \\ \tilde{w}^*(L, L-\varepsilon) & -\tilde{T}^*(L, L-\varepsilon) \end{Bmatrix} \\ & \begin{Bmatrix} \tilde{M}^*(L, \varepsilon) & -\tilde{V}^*(L, \varepsilon) \\ \tilde{M}^*(L, L-\varepsilon) & -\tilde{V}^*(L, L-\varepsilon) \end{Bmatrix} \{X(L)\} \\ - & \begin{Bmatrix} \tilde{w}^*(0, \varepsilon) & -\tilde{T}^*(0, \varepsilon) \\ \tilde{w}^*(0, L-\varepsilon) & -\tilde{T}^*(0, L-\varepsilon) \end{Bmatrix} \\ & \begin{Bmatrix} \tilde{M}^*(0, \varepsilon) & -\tilde{V}^*(0, \varepsilon) \\ \tilde{M}^*(0, L-\varepsilon) & -\tilde{V}^*(0, L-\varepsilon) \end{Bmatrix} \{X(0)\} \\ + & \int_0^L q(x) \begin{Bmatrix} \tilde{w}^*(x, \varepsilon) \\ \tilde{w}^*(x, L-\varepsilon) \end{Bmatrix} dx \quad \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \{X(L)\} &= \{V(L) \ M(L) \ T(L) \ w(L)\} \\ \{X(0)\} &= \{V(0) \ M(0) \ T(0) \ w(0)\} \end{aligned}$$

式(12)と(13)において $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考えれば、境界における 8 個の量 $\{V(L) \ M(L) \ T(L) \ w(L)\}$ および $\{V(0) \ M(0) \ T(0) \ w(0)\}$ について、4 個の方程式が得られる。なお、後述のように、はりの基本解では $\varepsilon \rightarrow 0$ (すなわち、 $r = |y-x| \rightarrow 0$) のときに特異性が現われないので、上記の 4 個の方程式は、式(12)と(13)において $\varepsilon = 0$ とおいたものと同じものになる。これらの方程式は、つぎの形にマトリックス表示できる。

$$[H] \{\tilde{u}\} - [G] \{\tilde{p}\} = \{\tilde{f}\} \quad \dots (14)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \{\tilde{u}\} &= \{w(0) \ w(L) \ T(0) \ T(L)\} \\ \{\tilde{p}\} &= \{M(0) \ M(L) \ V(0) \ V(L)\} \end{aligned} \quad \dots (15)$$

のように定義すれば、係数マトリックス $[H]$ と $[G]$ は、それぞれ、次式で与えられる。

$$[H] = \begin{Bmatrix} 1-V^*(0,0) & V^*(L,0) \\ -V^*(0,L) & 1+V^*(L,L) \\ -\tilde{V}^*(0,L) & \tilde{V}^*(L,0) \\ -\tilde{V}^*(0,L) & \tilde{V}^*(L,L) \\ M^*(0,0) & -M^*(L,0) \\ M^*(0,L) & -M^*(L,L) \\ 1+\tilde{M}^*(0,0) & -\tilde{M}^*(L,0) \\ \tilde{M}^*(0,L) & 1-\tilde{M}^*(L,L) \end{Bmatrix} \dots(16)$$

$$[G] = \begin{Bmatrix} T^*(0,0) & -T^*(L,0) \\ -T^*(0,L) & -T^*(L,L) \\ \tilde{T}^*(0,0) & -\tilde{T}^*(L,0) \\ \tilde{T}^*(0,L) & -\tilde{T}^*(L,L) \\ -w^*(0,0) & w^*(L,0) \\ -w^*(0,L) & w^*(L,L) \\ -\tilde{w}^*(0,0) & \tilde{w}^*(L,0) \\ -\tilde{w}^*(0,L) & \tilde{w}^*(L,L) \end{Bmatrix} \dots(17)$$

および

$$\{f\} = \int_0^L q(x) \begin{Bmatrix} w^*(x,0) \\ w^*(x,L) \\ \tilde{w}^*(x,0) \\ \tilde{w}^*(x,L) \end{Bmatrix} dx \quad \dots (18)$$

基本解がわかると、式(14)と(17)の係数マトリックス $[H]$ と $[G]$ 、および式(18)の外力項 $\{f\}$ の各成分を計算することができる。このようにして、図 3 に示すような境界条件を考慮すれば、式(14)を 4 個の未知境界量について解くことができる。また、このようにして境界量が決定されると、式(9)や(10)を用いて、はりの任意点のたわみ w やたわみこう配 T を求めることができる。

曲げ剛性 EI が一定である均質はりの基本解は、次式で与えられることがわかっている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

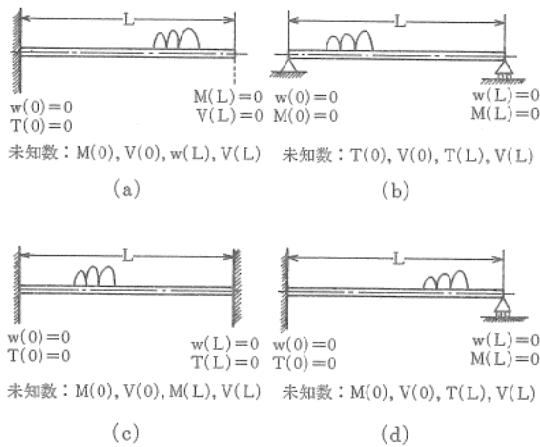


図3 種々の境界条件

$$\left. \begin{aligned} w^*(x, y) &= \frac{1}{12EI} (2l^3 + r^3 - 3lr^2) \\ T^*(x, y) &= -\frac{1}{4EI} r(r-2l) \operatorname{sgn}(y-x) \\ M^*(x, y) &= -\frac{1}{2}(r-l) \\ V^*(x, y) &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(y-x) \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

および

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w}^*(x, y) &= \frac{1}{4EI} r(r-2l) \operatorname{sgn}(y-x) \\ \tilde{T}^*(x, y) &= -\frac{1}{2EI} (r-l) \\ \tilde{M}^*(x, y) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(y-x) \\ \tilde{V}^*(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

ただし、 $r = |y-x|$ であり、 $y > x$ のとき $\operatorname{sgn}(y-x) = 1$ 、また $y < x$ のとき $\operatorname{sgn}(y-x) = -1$ とおく。なお、基本解は、自由空間すなわち無限長のはりに対するものであるが、式(19)において、 $r=l$ とおけば $w^* = M^* = 0$ 、また $r=0$ および $r=2l$ で $T^* = 0$ である。このことから、これらの基本解は、区間 $2l$ ごとに単純支持された曲げ剛性 EI の無限長はりの中心に単位荷重が作用するときの解を表わしているものと解釈できる。ここで、 l は解析対象のはりのスパン L に等しくおいてもよい。

弾性基礎上はりや変断面はりの曲げ問題についても、いくつかの例について基本解が求められており、うたと同様の定式化を行えば BEM

によって解析できることになる⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

はりの曲げ問題は1次元問題であり、BEMで解析するときは、上述のように境界点の諸量に関する代数方程式を解く問題に帰着する。本章では、2次元および3次元問題に対するBEMについて考察することにしよう。BEMを用いると問題の次元を1つだけ下げて取り扱うことができるので、解析すべき問題の次元が増すほど、FEMやFDMなどの領域型解法に比較して、BEMが一般に有利な解析法となる。

3. ポテンシャル問題

Laplace の微分作用素で表わされるポテンシャル問題を例にとり、直接法と呼ばれるBEMの基本概念を説明する。

3.1 基礎式

熱伝導や電磁場あるいは波動の問題などは、 ϕ をポテンシャルとしたとき、領域 Ω 内で Laplace 方程式：

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \dots (21)$$

を解く問題に帰着する。ここで、 ∇^2 はラプシアンと呼ばれ、次式で定義される微分作用素である。

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (2 \text{次元問題}) \quad \dots (22)$$

あるいは

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (3 \text{次元問題}) \quad \dots (23)$$

境界条件はつぎのように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} && ; \Gamma_{\phi} \text{ 上} \\ q &= \frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{q} && ; \Gamma_q \equiv \Gamma - \Gamma_{\phi} \text{ 上} \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

ここで、 $\partial(\cdot)/\partial n$ は境界 Γ 上での外向き法線方向微分である(図4)。また、上付バーは規定された値であることを示す。

支配方程式(21)を、Green の定理を用いて、境界上の未知量だけを含む積分方程式に変換し、これを境界条件(24)のもとで解くというのが、直接法と呼ばれる BEM の基本である。

ϕ と ϕ^* を、境界までも含めた全領域 $\Omega + \Gamma$ において2階導関数まで連続な関数とする。このとき、Green の定理は、式(21)の両辺に ϕ^* を掛けて領域 Ω にわたって積分して得られる恒

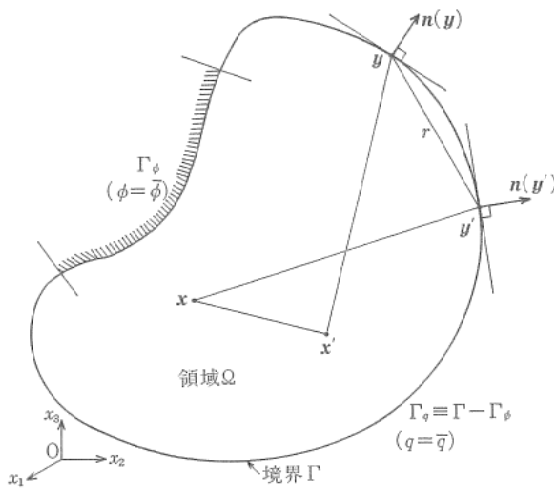


図4 ポテンシャル問題での使用記号

等式：

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi) \phi^* d\Omega = 0 \quad \dots (25)$$

に、Gauss の発散定理を適用することにより得られ、つぎのように表すことができる。

$$\int_{\Omega} [(\nabla^2 \phi^*) \phi - \phi^* (\nabla^2 \phi)] d\Omega = \int_{\Gamma} (\phi q^* - \phi^* q) d\Gamma \quad \dots (26)$$

ただし、

$$q^* \equiv \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \quad \dots (27)$$

とおいてある。ここで、3次元問題では、式(20)の左辺は領域全体にわたる体積分を、右辺は境界面上の面積分を表わす。また、2次元問題では、式(20)の左辺は面積分を、右辺は境界線に沿う線積分を表わすものと解釈する。

さて、領域 Ω を占めるものと同じ性質からなる無限媒体を考え、その中の1点 x に単位の集中ポテンシャルが作用する場合を考える。

点 y でのポテンシャル変化 $\phi^*(x, y)$ は次式により支配されることになる。

$$\nabla^2 \phi^*(x, y) + \delta(x, y) = 0 \quad \dots (28)$$

上式の $\phi^*(x, y)$ は、ポテンシャル問題の支配方程式(2)の基本解と呼ばれる。3次元問題について基本解は

$$\phi^*(x, y) = \frac{1}{4\pi r} \quad \dots (29)$$

また2次元問題について基本解は

$$\phi^*(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \quad \dots (30)$$

で与えられる。ただし、 $r = |x - y|$ である。式

(29)および(30)は、 $r \neq 0$ のとき Laplace 方程式(2)を満たすことは容易に確かめることができる。また、 $r = 0$ のとき

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \phi^*(x, y) d\Omega(y) = - \int_{\Omega} \delta(x, y) d\Omega(y) = -1 \quad \dots (31)$$

となることは、点 x を中心とする微小半径 ϵ の球(2次元問題では円)に関する積分を考え、 $\epsilon \rightarrow 0$ とおくことにより証明することができる⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾。

上述の基本解を Green の公式(20)の ϕ^* に用い、式(2)の関係を使えば、つぎの積分方程式が得られる。

$$\phi(x) + \int_{\Gamma} \{q^*(x, y') \phi(y') - \phi^*(x, y') q(y')\} d\Gamma(y') = 0 \quad \dots (32)$$

ここで、図4に示すように、 x は Ω 内の任意点を、 y' は Γ 上の任意点を表わす。また、 $d\Gamma(y')$ は境界点 y' における面積要素または線要素を表わすものとする。

式(32)は、 Ω 内の任意点のポテンシャル $\phi(x)$ と境界上のポテンシャル ϕ およびその流束 q とを関係づける積分方程式である。問題を BEM で解くためには、点 x を境界上の任意点 y に移行させた境界積分方程式を求める必要がある。このとき、基本解 ϕ^* とその流束 q^* は、 $r = |y - y'| = 0$ において特異性を持つことに注意しなければならない。 $r = 0$ における特異積分を評価するために、点 y を中心とする微小半径 ϵ の球面(2次元問題では円弧)上に点 y' があるものとして計算を進め、あとで $\epsilon \rightarrow 0$ の極限操作を行えばよい。境界面が点 y で滑らかな場合には、 $\epsilon \rightarrow 0$ とおくと

$$\int_{\Gamma_{\epsilon}} \phi^*(y, y') d\Gamma(y') \rightarrow 0, \quad \int_{\Gamma_{\epsilon}} q^*(y, y') d\Gamma(y') \rightarrow -1/2 \quad \dots (33)$$

となることが証明できる⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾。点 y がかど点にある場合も含めて、境界積分方程式はつぎのように表わされる。

$$c(y) \phi(y) + \int_{\Gamma} \{q^*(y, y') \phi(y') - \phi^*(y, y') q(y')\} d\Gamma(y') = 0 \quad \dots (34)$$

ここで、点 y で境界 Γ が滑らかなときは $c = 1/2$ である。

3.2 離散化と解法

境界積分方程式(34)を離散化し、代数方程式に変換して数値解を求めるために、境界 Γ を境界要素に分割する。このためには、FEM で用いられている種々の高次要素を応用することができる。

BEM の基本を理解するために、まず最も簡単な一定境界要素を用いる離散化について述べよう。

一定境界要素では、要素内で ϕ と q が一定であると仮定し、要素図心に位置する1つの節点における値で代表させる。したがって、境界上の全要素数を E とするとき、これは境界上の全節点数 M に等しくなる。

境界上の i 番目の節点座標 y_i に点 y が一致し、点 y' が j 番目の境界要素内にあるものと考え、式(34)を離散化すれば次式が得られる。

$$c_i \phi_i + \sum_{j=1}^E q_{ij}^* \phi_j - \sum_{j=1}^E \phi_{ij}^* q_j = 0 \quad \dots (35)$$

ただし、

$$q_{ij}^* = \int_{\Gamma_j} q^*(y_i, y') d\Gamma(y'),$$

$$\phi_{ij}^* = \int_{\Gamma_j} \phi^*(y_i, y') d\Gamma(y') \quad \dots (36)$$

である。ここで、 Γ_j は j 番目の境界要素を表わすものとする。式(35)をすべての境界積点について書き表わすと、つぎのような代数方程式にまとめることができる。

$$[H] \{ \tilde{\phi} \} - [G] \{ \tilde{q} \} = \{ 0 \} \quad \dots (37)$$

ここで、 $\{ \}$ は列ベクトルを表わすものとし、

$$\{ \tilde{\phi} \} = \{ \phi_1 \phi_2 \dots \phi_E \}, \quad \{ \tilde{q} \} = \{ q_1 q_2 \dots q_E \} \quad \dots (38)$$

である。また係数マトリックス $[H]$ と $[G]$ は次式で与えられる。

$$[H] = \begin{pmatrix} c_1 + q_{11}^* & q_{12}^* & \dots & q_{1E}^* \\ q_{21}^* & c_2 + q_{22}^* & \dots & q_{2E}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{E1}^* & q_{E2}^* & \dots & c_E + q_{EE}^* \end{pmatrix} \quad \dots (39)$$

$$[G] = \begin{pmatrix} \phi_{11}^* & \phi_{12}^* & \dots & \phi_{1E}^* \\ & \phi_{22}^* & \dots & \phi_{2E}^* \\ \text{(Sym.)} & & & \vdots \\ & & & \phi_{EE}^* \end{pmatrix} \quad \dots (40)$$

一定境界要素を用いる離散化では、境界を平面あるいは直線状の要素に分割するため、係数マトリックス $[H]$ の対角項に現われる係数 c_i は、すべての節点において $c_i = 1/2$ となる。しかし、この値を直接用いなくても、式(37)で一様ポテンシャルのもとでは流束が全境界上で0になるという条件：

$$\{ \tilde{\phi} \} = \{ I \}, \quad \{ \tilde{q} \} = \{ 0 \} \quad \dots (41)$$

を考えることにより、 $[H]$ の対角項は定めることができつぎのようになる。

$$H_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^E H_{ij} \quad \dots (42)$$

ただし、

$$\{ I \} = \{ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \} \quad \dots (43)$$

である。

式(37)は、 $2E$ 個の境界節点量について E 個の方程式を与える。境界条件により、 Γ_ϕ 上の ϕ と Γ_q 上の q の値、すなわち E 個の節点量が規定されているので、式(37)を E 個の未知節点量について解くことができる。

境界上での ϕ と q の値が上述のようにして求められると、 Ω 内のポテンシャル値は、式(32)を離散化した次式により計算できる。

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^E \phi_j^*(x) q_j - \sum_{j=1}^E q_j^*(x) \phi_j \quad \dots (44)$$

ただし、

$$\phi_j^*(x) = \int_{\Gamma_j} \phi^*(x, y') d\Gamma(y'),$$

$$q_j^*(x) = \int_{\Gamma_j} q^*(x, y') d\Gamma(y') \quad \dots (45)$$

である。

つぎに、高次境界要素を用いる場合の離散化について考えてみよう。この場合は、要素の節点値を用いて、要素内の任意点における ϕ と q の値がつぎのように補間できると考えればよい。すなわち、

$$\phi = [N]^T \{ \phi \}^e, \quad q = [N]^T \{ q \}^e \quad \dots (46)$$

ここで、 $\{ N \}$ は形状関数(Shape Function)、 T はマトリックスの転置(Transpose)を表すものとする。また、 $\{ \phi \}^e$ および $\{ q \}^e$ は、 e 番

目の境界要素における ϕ と q の節点値を成分とする列ベクトルである。高次要素を用いる場合は、ある要素の節点が決った境界要素の節点でもあることに注意する必要がある。これ以外については、一定要素の場合と同様に離散化を行うことができ、最終的に式(6)の形の代数方程式にまとめることができる。これを境界条件を考慮して、未知節点量について解けば問題が解決できる。

4. あとがき

線形問題の簡単な例を取上げて、BEM の基本概念について解説した。他の多くの工学上の問題への BEM の応用については、文献(1)～(6)を参照されたい。

本稿で強張したように、BEM は、支配微分方程式をこれと等価な境界積分方程式に変換して数値解を求めようとする解析法である。このとき、体積分と境界上の面積分とを関係づける Green の定理と、無限媒体に関する基本解を用いて定式化が行われる。したがって、BEM を応用するには、解析すべき問題の支配微分方程式に対応する基本解が必要である。線形問題についての基本解は数多く知られているが⁽⁶⁾、非

線形問題については、基本解を求めることはほとんど不可能である。このために、BEM は線形問題のみに適した解析法であると考えられがちである。しかしながら、BEM による非線形問題の解析も、対応する線形問題の基本解を用いる反復計算法により、効率よく解析できることが最近の研究で明らかになってきている。このように、適用範囲が拡大の一途をたどっている BEM の最近の研究動向、とくに非線形解析への応用については、別の機会に報告することにした。

最後に、本稿の執筆をお勧めいただいた大阪大学工学部長谷川嘉雄教授に厚く感謝します。

参考文献

- 1) 神谷紀生・田中正隆・田中喜久昭(共訳)：境界要素法入門，培風館，(1980)。
- 2) 神谷紀生・田中正隆・田中喜久昭(共訳)：境界要素法の基礎と応用，培風館，(1981)。
- 3) C. A. Brebbia (ed.)：Boundary Element Methods, Springer-Verlag, (1981)。
- 4) C. A. Brebbia (ed.)：Progress in Boundary Element Methods, Pentech Press, (1981)。
- 5) 田中正隆・田中喜久昭(鷲津久一郎監修)：境界要素法—基礎と応用，丸善，(1982)。
- 6) 田中正隆：連続体力学への境界要素法の応用，機械の研究，養賢堂，34—1 (1982)～。