研究ノート

サン・ブナンの原理について

橘　英三郎*

はじめに

変形する物体の1部分に働く外力を，合力・合モーメントの等しい別の外力に置き換えた場合，影響を受けるのはその周辺部だけであって，ある程度離れると殆ど置換による差は生じなくなる．(図1)．

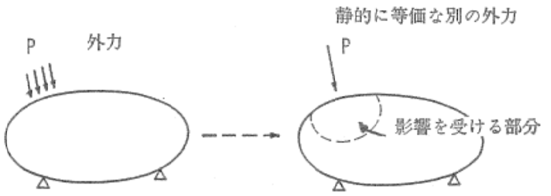

図　1

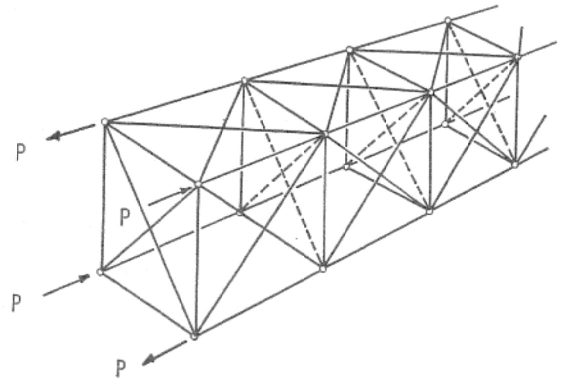

図　2

経験的に“おおむね正しい”とされているこのサン・ブナンの原理は実験や理論の応用においてしばしば重要な役割を果たしている．しかし，その重要さにもかかわらず未だすっきりとした形式では証明されていない．特に対象が骨組のような離散系の場合，マクロに見て一様性，等方性が期待できないため，定性的な議論が一層困難となっている．図2のようなトラスに合力・合モーメントが0の荷重が働いている場合，サン・ブナンの原理では荷重領域から離れるにつれて無荷重状態と同じになることが期待されるが，Hoff[1)2)]はそのためには図中の破線で示す部材のあるなしが重要であることを指摘している．しかしその結論も“荷重領域の周辺に荷重の効果が互に相殺されるような力の通路がある場合に限り成立する”とか“合う場合は合う”といった非常に感覚的な表現の域にとどまっている．

筆者はもう少し定性的にと思い，次の考察を行なった．ただし以下での議論は全て弾性微小変形内の範囲に限定している．

〔**考察1**〕図3(a)のように上下，左右対称の2つの骨組の一方に合力・合モーメントが0の荷重が働くものとする．

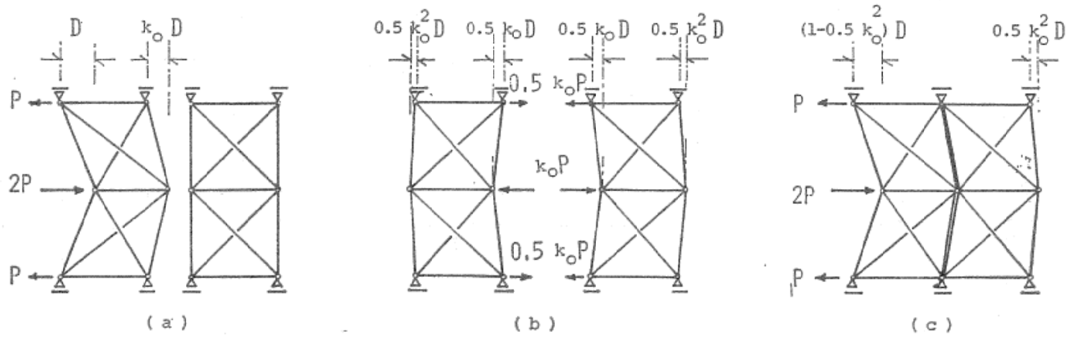

図　3

*橘英三郎（Eizaburo TACHIBANA）大阪大学工学部建築工学科助手，工修，構造力学

図中のD，k_0D はそのときの“ゆがみ”を表わしている．次に(b)のような荷重状態を考え，さらに(a)，(b)を合成すると(c)が得られる．k_0 を“ゆがみ”の減小率と見做すと２つの骨組の連成化により k_0 は $(0.5k_0{}^2)/(1-0.5k_0{}^2)$ に変化したことになる．従って，2^0，2^1，2^2，…，2^n 個からなる系について順に考えていくと一般に次の漸化式が得られる．

$$k_n=(0.5k^2{}_{n-1})/(1-0.5k^2{}_{n-1})\cdots\cdots(1)$$

但し k^n は 2^n 個からなる系に対する減小率

荷重の合力・合モーメントが０であるからサン・ブナンの原理によると n の増加に対し k_n は０に近づくことが期待されるが，実際に(1)式に対し k_0 を適当に与えて k_n を求めると図４のようになり，そのことを確かめられる．

はじめに k_0 の値を与えなければならないので(1)式は結局は問題のすりかえともいえるが，ただ，このグラフから影響の減小についてある程度スピード感がつかめるのではなかろうか．（横座標の n は 2^n の肩符の意味なので誇張されてはいるが．）又(1)式を Hoff の例にあてはめると，図２での立体トラスの場合，たとえ破線の部材があったとしても，外回りの斜材が極端に細い場合には，（即ち k_0 が１に近い値に相当）荷重の影響が遠くまで伝わるであろうことに気がつく．このことはなるほど考えてみると当然ことであり，たとえ Hoff の興味がサン・ブナンの原理成立のためのキーワードが単なる不静定次数の大きさでないということに向けられていたとしても，Hoff はこのことに気づくべきであった．Hoff は破線で示された部材，即ち“力の通路”の重要性を強調するあまり，外回り斜材の剛性を逆に軽視しているが，実際はその両方がサン・ブナンの原理成立に重要な要素であるといえよう．(1)式の誘導は Zanaboni[1] が行ったところの“棒材の端部における合力・合モーメント０の荷重による影響が遠く離れるにしたがい単調に減小する”ことについての証明法に似ているが，モデルを具体化したことと，2^n 個からなるシステムを考えたことにより証明や評価尺度がはるかにシンプルとなっている．又，図３のようにして得られる 2^n 個の連成モデルを一端固定のワーピング問題に対するアナロジーとして考えると，その要点がいく分わかり易くなるように思えるが，いかがであろうか．

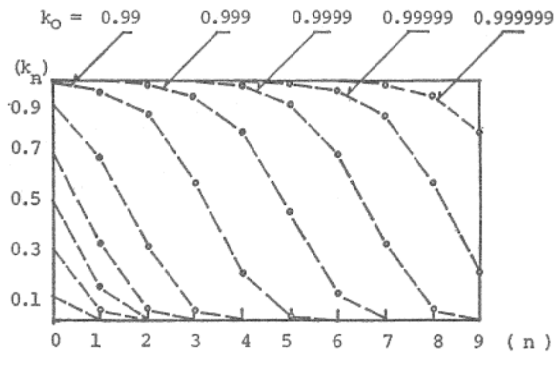

図 4

〔考察２〕 筆者は以前に図５のような種々の荷重系に対し次の上下界定理を導いている[3]．

$$|\sqrt{W_a}-\sqrt{W_b}|\leqq\sqrt{W_c}\leqq\sqrt{W_d}\cdots\cdots\cdots(2)$$

但し W_a，W_b は合力・合モーメントが等しい荷重系による歪エネルギーで，W_c はそれらの荷重系の差（当然合力・合モーメントが０となっている．）が働らいた場合の歪エネルギー，W_d はさらにそのときの荷重領域部分を切りはなした場合の歪エネルギーを表わしている．

この定理は一般的な離散系に対し，厳密に成立する．証明は略するが，離散系の定義とそれに対するノルム空間を組みたてるところまでが

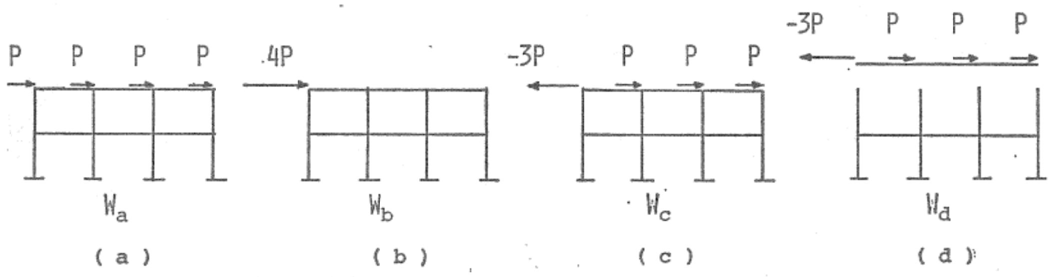

図 5

やっかいで，あとは Schwartz の不等式等から簡単に証明できる．

図5の意味についてのべると，(a)のように分布する荷重は実験等ではしばしば(b)のように簡略化される．2つの間の応力状態の差は，加法定理から(c)のような状態で表わされることになる．従って弾性微小変形内での話しである場合，サン・ブナンの原理は(c)のように合力・合モーメントが0の荷重状態の評価が重要となる．説明が前後するが，図2，図3はその意味が含められていた．

ところでこの定理から単純にわかることは，もし，W_d が小さければ（この例では梁の剛性が大きければ）(2)式より $W_a \fallingdotseq W_b$ となることである．しかしさらに深く考えると単純にそうはいかないことに気がつく．今，図6のように筋違いをつけて全体の剛性を上げるとする．その場合も W_d は変化がないが，一方，W_a，W_b の絶対値が小さくなり相対的にエネルギー誤差の上界が大きいものとなる．いいかえると図5のような場合は(a)→(b)の置換は許されるが，図6のような場合は許されないことも当然あり得る．

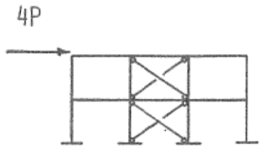

図 6

ただしそのことにさえ注意しておけば，(2)式も結構，簡単なチェック用として役に立つはずである．

おわりに

サン・ブナンの原理成立に関する簡単なチェック用の公式を示した．しかし“合う場合は合う”からそれほど具体化していないような気もする．

現在筆者は構造力学の数理的な部分だけを公理的な立場から再構築しているが，こうした，力学的センスも要求される問題が最っとも扱いにくゝ，又大いに興味のひかれるところでもある．

引 用 文 献

1）Y.C. ファン（大橋義夫他訳）“固体の力学/理論培風館
2）N.J. Hoff “The Applicability of Saint-Venant's Principle to Airplane Structures, J. Aero. Sci., 12, 455—460 (1945).
3）橋英三郎“離散的な構造モデルにおける Saint-Venant の原理について„ 第27回応用力学連合講演論文抄録集（1977）.