研究ノート

非定常流れの数値解析に関連して

（円管の場合の壁面せん断応力の表示式）

近江宗一* 井口 学**

1．はじめに

管内非定常現象の諸特性を数値解析する場合には，壁面せん断応力に関する情報が必要とされることが多い．ここでは，従来円管内の層流と乱流の非定常流れに対して提案されている壁面せん断応力 τ_w の表示式を，断面平均速度が任意の変化をする場合とそのうちでも代表的な形をとる脈動流れの場合について示す．以下の表示式は非圧縮性流体を仮定して導かれているが，圧縮性の程度がさほど大きくなく，熱収支を問題にしなくてもよいような場合には十分な精度で適用できる．

2．記　号

D：管直径＝2 R

$M_\nu(\sqrt{\omega'})$，$\theta_\nu(\sqrt{\omega'})$：$\nu$ 次の第1種ベッセル関数 $J_\nu(i^{2/3}\sqrt{\omega'})$ の振幅と位相角

p：圧力

$R_{e\ ta}$：時間平均レイノルズ数＝$u_{m,\ ta}\ D/\nu$

t：時間

u_m：断面平均速度

κ：慣性係数

$\lambda_{q,\ t}$：擬定常管摩擦係数

μ：粘性係数

ν：動粘性係数

ρ：密度

τ_w：壁面せん断応力

ω：角周波数

ω'：無次元角周波数＝$R^2\ \omega/\nu$

添字

os，ta：脈動流れの振動成分と時間平均成分

*近江宗一（Munekazu OHMI），大阪大学工学部，冶金工学科教授，工学博士，冶金工学・流体工学
**井口　学（Manabu IGUCHI），大阪大学工学部，冶金工学科助手，工学博士，冶金工学・流体工学

3．層流非定常流れの壁面せん断応力

3．1　断面平均速度 u_m が任意の変化をする場合

管軸にそう圧力こう配が一定な円管内の層流定常流れは Hagen-Poiseuille の流れとしてよく知られており，速度分布は放物線となる．ところが，圧力こう配が時間とともに変化する場合には，変化が非常にゆっくりしている特別な場合を除けば，一般に速度分布は放物線からずれて複雑な分布を示し，τ_w も定常流れとは異なった値をとる．Zielke[1] はこのような層流非定常流れにおける τ_w と u_m の関係を，たたみこみを用いて次式のように表わした．

$$\tau_w=\frac{4\mu}{R}\ u_m+\frac{2\mu}{R}\int_0^t \frac{du_m}{dt}(u)W(t-u)du \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$W(\tau)=e^{-26.3744\tau}+e^{-70.8493\tau}+e^{-135.0198\tau}+e^{-218.9216\tau}+e^{-322.5544\tau}$$
$$\tau>0.02 \qquad \cdots\cdots(2a)$$

$$W(\tau)=0.282095\,\tau^{-1/2}-1.250000+1.057855\,\tau^{1/2}+0.937500\,\tau+0.396696\,\tau^{3/2}-0.351563\,\tau^2,$$
$$\tau<0.02 \qquad \cdots\cdots(2b)$$

ここで

$$\tau=\nu t/R^2 \qquad \cdots\cdots(3)$$

は無次元時間であり，$W(\tau)$ は重み関数である．式(1)の τ_w は水撃や油撃の計算において広く用いられている．しかし式(2a)，(2b) の $W(\tau)$ を用いると非常に多くのメモリを必要とし，さらに計算時間がかなりかかるので，この点を改良する方法が Trikha[2] や香川ら[3] によって報告されている．

3．2　脈動流れの場合

断面平均速度 u_m が次式

$$\left.\begin{aligned} u_m&=u_{m,ta}+u_{m,os}\\ u_{m,os}&=|u_{m,os}|\cos(\omega t+\angle u_{m,os})\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4)$$

のように変動する流れは，往復動圧縮機あるいは往復動ポンプを含む配管系，内燃機関の吸排気管内，渦巻ポンプのディフューザ内の流れに普通にみられるほかに，弁の自励振動，管路の共振などによってもごく一般に観察される．このような場合の τ_w と u_m の関係は次式で表わされる[4]．

$$\tau_w=\frac{4\mu}{R}u_{m,ta}+\frac{4\mu}{R}\left\{\eta_1(\sqrt{\omega'})u_{m,os}+\frac{\xi_1(\sqrt{\omega'})}{\omega}\frac{du_{m,os}}{dt}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

ここで係数 $\eta_1(\sqrt{\omega'})$ と $\xi_1(\sqrt{\omega'})$ はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned}\eta_1(\sqrt{\omega'})&=\frac{\sqrt{\omega'}}{4}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_2(\sqrt{\omega'})}\cos[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_2(\sqrt{\omega'})+3\pi/4]\\ \xi_1(\sqrt{\omega'})&=\frac{\sqrt{\omega'}}{4}\frac{M_1(\sqrt{\omega'})}{M_2(\sqrt{\omega'})}\sin[\theta_1(\sqrt{\omega'})-\theta_2(\sqrt{\omega'})+3\pi/4]\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\omega'=R^2\omega/\nu\quad\cdots\cdots\cdots(7)$$

と表わされる．無次元角周波数 ω' の増加とともに $\eta_1(\sqrt{\omega'})$ は1から $\sqrt{\omega'}/(4\sqrt{2})$，$\xi_1(\sqrt{\omega'})$ は0から $\sqrt{\omega'}/(4\sqrt{2})$ へと漸近していく．式(5)の近似式として等価粘性抵抗表示式[5]などが報告されている．

4．乱流非定常流れの壁面せん断応力

管内乱流非定常流れの壁面せん断応力に関する研究は工業上重要であるにもかかわらず非常に少なく，加速流れ，減速流れや脈動流れに関する実験が限られた加速度とレイノルズ数の範囲で行われている程度である．また従来の測定結果の中には，定常流れの乱流遷移を表わす臨界レイノルズ数に基づいて，流れを乱流と判断して求められた可能性のあるものが散見される．このことが従来の実験結果に統一性が欠け，相反する傾向さえみられる一因とも考えられる．以下，従来提案されている τ_w の表示式を列挙するが，それらの適用性は十分確認されているわけではないので，使用に際しては十分注意を要する．

4．1　断面平均速度 u_m が任意の変化をする場合

(1)　Trikha の表示式[2]

$$\tau_w=\lambda_{q,t}\frac{\rho}{8}u_m^2+\frac{2\mu}{R}\int_0^t\frac{du_m}{dt}(u)W(t-u)\,du\quad\cdots\cdots\cdots(8)$$

ここで $\lambda_{q,t}$ は乱流擬定常管摩擦係数であり，レイノルズ数の範囲に応じて定常流れの適当な実験式を採用すればよい．重み関数 $W(\tau)$ は式(2a)，(2b) とまったく同じである．

Trikha は，上式を採用するに至った物理的背景はもとより，適用性についてもまったく言及していない．筆者らが乱流減速流れに関して行った実験範囲では，上式は τ_w を大きめに見積る傾向がみられた．しかし，後掲の式(14)に関して述べるのと同様な理由から，式(8)は加速度の非常に小さい場合と大きい場合には適用できると思われる．

(2)　Wood と Funk の境界層モデル[6]に基づく表示式[7]　Wood と Funk は乱流非定常流れに対して，壁近傍の層流境界層と管中心部の非粘性コアからなる単一境界層モデルを提案し，これを u_m が直線的に減少する乱流と乱流脈動流れに適用した．その結果，attenuation factor の理論値は加速度の非常に大きい場合には測定値に精度よく一致することが判明した[6)8)]．しかし，彼等の実験範囲外における適用性については分らない．ここでは彼らのモデルを u_m が任意の変化をする場合に適用した結果[7]について示す．

$$\tau_w=\lambda_{q,t}\frac{\rho}{8}u_m\left[u_{m,1}+\int_0^t\frac{du_m}{dt}(u)W_t(t-u)\times du\right]\quad\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$W_t(\tau')=\begin{cases}(1+2e^{-1/\tau'})/\sqrt{\pi\tau'}, & \tau'\leqq 0.655\\ 1 & ,\tau'>0.655\end{cases}$$

$$\cdots\cdots(10)$$

ここで

$$\tau'=\nu t/\Delta^2, \Delta=8D/(\lambda_{s,t,1}R_{e1}),$$

$$R_{e.1}=u_{m,1}D/\nu \qquad \cdots\cdots(11)$$

であり，$u_{m,1}$ と $\lambda_{s,t,1}$ はそれぞれ初期定常流れの断面平均速度と管摩擦係数である．上式(9)は加速度の小さい場合にも適用できるように少し修正を加えてある．ただし，本表示式の適用範囲については現在のところよく分っていない．

従来，加速度の小さい場合には擬定常表示式

$$\tau_w \doteqdot \lambda_{q,t}\rho u_m^2/8 \qquad \cdots\cdots(12)$$

が用いられてきたが，これよりも優れた式として，最近筆者らは加速度項を考慮した次式

$$\tau_w=\lambda_{q,t}\frac{\rho}{8}u_m^2+\frac{\kappa\rho D}{4}\frac{du_m}{dt} \qquad \cdots\cdots(13)$$

を提案した[9]．ここで κ を慣性係数と呼ぶが，運動量補正係数から1を引いた値である．右辺第2項で示される加速度項の存在は，τ_w と u_m の間には位相差が存在することを意味している．

4．2　脈動流れの場合

筆者らは先に空気と水を用いた実験結果に基づいて乱流脈動流れの壁面せん断応力に対し，次の二つの表示式を提案した[10]．

(1)　τ_w が，ω' の非常に小さいときには乱流擬定常表示式(12)に，ω' が非常に大きいときには層流脈動流れの表示式(5)に漸近するように定めた式．

脈動周波数が非常に高くなると，管内全体に目を向けた場合には，変動成分に及ぼす粘性力の影響は相対的に小さくなるが，壁近傍の粘性底層においてはかえって大きな影響を流れに及ぼすことが層流脈動流れの解析結果からも予想される．すなわち速度の振動成分の顕著な変化が粘性底層内に限られるような高い脈動周波数においては，定義式 $\tau_w=-\mu(\partial u/\partial r)_{r=R}$ に基づいて決定される τ_w は層流の値に一致するようになるであろう．このような推定のもとに決定したのが次式である．

$$\tau_w=\lambda_{q,t}\frac{\rho}{8}u_m^2+\frac{4\mu}{R}\left[\{\eta_1(\sqrt{\omega'})-1\}(u_m-u_{m,ta})+\frac{\xi_1(\sqrt{\omega'})}{\omega}\frac{du_m}{dt}\right] \qquad \cdots\cdots(14)$$

ここで $\eta_1(\sqrt{\omega'})$，$\xi_1(\sqrt{\omega'})$ は式(6)とまったく同じである．

(2)　運動量の式

$$\frac{\Delta p}{l}=\rho\frac{du_m}{dt}+\frac{4}{D}\tau_w \qquad \cdots\cdots(15)$$

の圧力項 $\Delta p/l$，慣性項 $\rho\, du_m/dt$，および粘性項 $4\tau_w/D$ の量的相互関係を記述する特性数の測定値をもとにして定めた式[10]

$$\tau_w=\lambda_{q,t}\frac{\rho}{8}u_m^2+(2+b)\lambda_{s,t}\frac{\rho}{8}u_{m,ta}\times\left[\{\eta_1(\sqrt{\omega_e'})-1\}(u_m-u_{m,ta})+\frac{\xi_1(\sqrt{\omega_e'})}{\omega}\frac{du_m}{dt}\right] \qquad \cdots\cdots(16)$$

$$\lambda_{s,t}=aR_{e\,ta}^b, R_{e\,ta}=u_{m,ta}D/\nu \qquad \cdots(17)$$

$$\omega_e'=\frac{64\omega'}{a(2+b)R_{e\,ta}^{1+b}} \qquad \cdots\cdots(18)$$

この式はいわば直観的に決定したものであって明確な物理的意味を有しているわけではない．

以上の2式(14)，(16)は $R_{e\,ta}=10^4\sim10^5$，速度振幅比 $A_1=|u_{m,os}|/u_{m,ta}=0.05\sim0.9$ の範囲では $\sqrt{\omega'}\lessapprox R_{e\,ta}^{3/8}$ の周波数領域において適用しうることを実験との比較によって確認している[10]．$\sqrt{\omega'}>R_{e\,ta}^{3/8}$ の範囲における妥当性については今後の検討がまたれる．

5．結　　言

従来円管内の非定常流れに対して提案されている壁面せん断応力の各種表示式を示した．層流の場合には問題ないが，乱流の場合に提案されている諸式はそれらの妥当性が十分検討されているわけではない．使用に際してはこの点に

配慮することが肝要であろう.

今後，乱流非定常流れの壁面せん断応力に関する実験データの蓄積が是非とも望まれる．ただし，実験時には流れが実際に乱流であるかどうかを十分調べておく必要がある.

文　　献

1）Zielke, W., *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, 90-1 (1968—3), 109.
2）Trikha, A.K., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, 97-1 (1975—3), 97.
3）香川・ほか，3名，機論，49—477，B（昭58—11)，2638.
4）近江・ほか，2名，機論，46—405，B（昭55—5)，846.
5）山口・市川，豊田高専研紀，4（昭46)，1.
6）Wood, D.J. and Funk, J.E., *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, 92—4 (1970—12), 865.
7）Iguchi, M. and Ohmi, M., *Technol. Rep. Osaka Univ.*, 33—1728 (1983—10), 349.
8）Funk, J. E. and Wood, D.J., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, 96—4 (1974—12), 365.
9）井口・ほか，2名，機講論，No. 844-6 (1984-3)，25；機論，51—462，B（昭60—2)，436.
10）近江・井口，機論，47—414，B（昭56—2)，268.