変分原理的自然観について

研究ノート

瀬　口　靖　幸*

1．Lagrangeの原理

Lagrange の原理は，制約付の最適問題を制約なしの最適問題に変換するとき，制約に対してLagrange乗数を乗じてもとの目的関数に組み込んだものに対して，再び最適性あるいは停留性を述べることができるという最適原理の一つである[1)] 厳密性を問わないとして具体的にこれを述べると次のようになる。

$$\max\ f(x)\ \text{s.t.}\ g(x)=b \qquad (1)$$

は，ある条件のもとで

$$\text{(a) Stationary}\ f(x)-y^{T}g(x) \qquad (2)$$

あるいは

$$\text{(b)}\ \max\ f(x)-y^{T}g(x) \qquad (3)$$

などと等価である。(a)は弱形式，(b)は強形式の表現である。

これらに関してさまざまな定理が導かれるが，ここでは触れないでおこう。式(2), (3)で，yは Lagrangeの乗数と呼ばれる。最適点$\bar{x}=x(b)$で最適値$U(b)=f(x(b))$をとるとき

$$y^{T}=\partial U/\partial b \qquad (4)$$

であることを示すことができる。有限資源を全利得が最大になるように割り当てると，ＬＰの問題においては，もし利得が資金で測られるならば，単位資源当たりの価格となり，これが「Shadow Price」と呼ばれることはよく知られている。また，強形式の場合，Lagrange 関数

$$L(x,y)=f(x)+y^{T}(b-g(x)) \qquad (5)$$

に対して

$$U(b)\leqq\min_{y}\ \max_{x}\ L(x,y) \qquad (6)$$

が成立するから

$$L(y)=\max_{x}\ L(x,\ y) \qquad (7)$$

に対して，

$$\min_{y}\ L(y) \qquad (8)$$

は原問題に対する双対問題を構成する。

双対問題は古典力学系では補足問題（Complementary Problem）と呼ばれるものと同じである。式(7)の右辺の問題から新たに得られた制約は，式(1)のもとの制約に対していわゆる双対な制約である。自然なシステムである物理系をここで述べた形式で記述することが可能であるが，このとき，もとの制約は既知の自然法則系であり，それを原系と呼べば，式(7)から得られる制約は随伴系と呼ばれるいわば「裏の系(Hidden System)」を規定する式である。このとき，随伴系が原系と同じであれば自己随伴と呼ばれ，異なれば非自己随伴であると呼ばれる。自己随伴であるとき原系は保存系であり，非自己随伴のときは非保存系であると呼ばれる。自己随伴のときはLagrange関数は原系の関数のみとなり原系のみで系が閉じるが，非自己随伴のときは原系に随伴系を「抱き合わせる」ことにより系が閉じることを示している。前者は古典的な変分原理と等価であり，Lagrange 関数はいわゆるその系の汎関数を与える。後者は前者の類推から，やはりより一般的な変分原理を構成するといってよく，まだ一般的ではないが随伴変分原理と呼ばれるべきものである。

双対問題には，問題の取り扱い上，原系に比べていろいろ長所があるが，それにも増して双対問題を考察する大きい長所は，原問題にそれをあわせて考察することにより問題の本質がよ

*瀬口靖幸(Yasuyuki SEGUCHI)，大阪大学基礎工学部，機械工学科，教授，工学博士，機械工学

り深く理解されることであろう。

なおここでは強形式と弱形式の区別をしない理由は，最適点の近傍に関心を移すことにより区別をする必要がなくなるからである。また，不等式制約はスラック変数により等式制約におきかえるものとする。

2．例1．電気回路系の問題

節点 j と k と結ぶ回路の電流をx_{jk}とし，節点 j に外部からb_jの電流が流れ込むとする次の問題を考える。

$$f(x)=-\frac{1}{2}\sum_{T} R_{jk}x_{jk}^2 \qquad (9)$$

$$\text{s.t.}\ \ \Sigma x_{jk}=b_j \quad (j=1,2,\cdots,\ m) \qquad (10)$$

ここで，R_{jk}は回路の抵抗，$\sum_{T}$は回路についての総和である。

式(9)は回路系の全エネルギーに負号を付けたもの，式(10)は保存則である。この問題のLagrange関数は

$$L(x,y)=-\frac{1}{2}\sum_{T} R_{jk}x_{jk}^2+\Sigma y_j(b_j-\Sigma x_{jk}) \qquad (11)$$

である。停留条件は

$$x_{jk}=(y_k-y_j)\ /\ R_{jk} \qquad (12)$$

となり，式(7)の最小化されるべき関数は次のようになる。

$$\max L(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{T}(y_k-y_j)^2/R_{jk} + \sum_{j} y_j b_j \qquad (13)$$

Lagrange乗数の物理的意味と，双対問題の有利性は明らかである。

y_jは j 点の電位であることが式(12)よりわかる。ここで注意したいのは，もし目的関数が適切であれば，電流の双対量が電位であることが自然に出てくることである。このことの意味は重大で次の2点に注意したい。

1）電位は適切な目的関数のもとで，自然に導入される「裏の物理量」である。すなわち，原系の電流は電子の移動として「観察される」量であり，電位は直接観察されないが，電流と「抱き合わせ」て系を閉じるために導入される物理量である。

2）「適切な目的関数」という表現の意味は複雑である。この場合，理想的な回路系として適切であった。導かれた電流と電位に対する物理関係以外の現象は観察されないという意味で適切である。もし適切でなければ，現実の系との間には何らかの差異が生じるはずである。この目的関数の設定は一般の場合，発見的であり，経験，洞察，観察により達成されるという以外，現在のところ論を進めることができない。

3．例2．連続系の場合Ｉ—弾性床上の弦

弾性床におかれ張力p(x)，横荷重f(x)を受ける弦のたわみu(x)は，床のばね定数をq(x)とすると

$$-(pu')'+qu=f \qquad (14)$$

ただし，u(0)=O，u'(1)=Oとする。

で与えられる。( )'=d( )/dxである。今，目的関数に

$$-\int_0^n f\,u\,dx \qquad (15)$$

を選ぶとLagrange関数はLagrange乗数をλとして

$$L(u,\lambda)=-\int_0^1 fudx+\int_0^1\{-(pu')'+qu-f\}\ \lambda\ dx + \lambda_0 u_0(0)+\lambda_1 u_1'(1) \qquad (16)$$

この問題の u に関する停留条件は p(0)，p(1)≠0のとき

$$-(p\lambda')'+q\lambda=f$$

ただし，

$$\lambda(0)=O,\ \lambda'(1)=O$$

$$\lambda_0=\lambda'p,\ \lambda_1=\lambda p \qquad (17)$$

となる。これより，

$$u=\lambda \qquad (18)$$

であることがわかり，式(18)と

$\lambda_0=\lambda'p,\quad \lambda_1=\lambda p$

をあわせて式(16)に代入すると

$$L(\lambda)=\int_0^1\{(p\lambda')^2+q\lambda^2-2f\lambda\}\ dx + 2\lambda'(0)p(0)\lambda(0) \qquad (19)$$

となり，先験的に我々が教えられている汎関数が得られる。この場合は原系と随伴系は同じであるから自己随伴である。ここで我々は次のことを知る。

1）汎関数をLagrange関数から自然に得る手続きを示すことができた。この方法は従来のものと異なる視点を有する。

2）自己随伴は原系と裏の系が同じものであることである。一般に「単純な系」は自分だけで系を閉じる。良くも悪くもこのような系を理想系と呼べばよいであろう。

4．例3．連続系の場合II－Beckの柱

調和振動を仮定し，時間に対する平均エネルギの概念を導入したとき，無次元長さ1のBec kの柱の動的不安定問題は，無次元たわみu(x)，無次元荷重p，無次元振動数$\sqrt{\lambda}$ に対して次のように書ける。

$$u^{IV}+pu''-\lambda u=0 \quad 0\leqq x\leqq 1 \tag{20}$$

ただし

$$u(0)=u'(0)=0,\ u''(1)=u'''(1)=0 \tag{21}$$

このときのLagrange関数は

$$L(u,v)=\int_0^1 \{u''v''-pu'v'-\lambda uv\}\,dx + pu'(1)v(1) \tag{22}$$

で与えられ，停留条件より随伴系の微分方程式は

$$v^{IV}+pv''-\lambda v=0 \tag{23}$$

ただし，$v(0)=v'(0)=0$,

$$v''(1)+pv(1)=v'''(1)+pv'(1)=0 \tag{24}$$

であることが，前例と同様の過程から示される[2]。ここでは固有値問題であることを意識し目的関数を設定していない。$\mu=v''+pv$ とおくことにより式(23)，(24)は

$$\mu^{IV}+p\mu''-\lambda\mu=0 \tag{25}$$

ただし，$\mu''(0)=\mu'''(0)=0$, $\mu(1)=\mu'(1)=0$ となるから

$$\mu(x)=u(1-x)=v''(x)+pv(x) \tag{26}$$

とおけることがわかり，このときは自己随伴でないことが示される。この随伴系は，もしvを柱のたわみと考えれば，Reutの柱に相当することがわかっている。最も簡単な非自己随伴の例として，この問題は次の諸点で興味深い。

1）Reutの柱は真の意味でBeckの柱の随伴系ではない。なぜならば随伴変数vは式(26)に見るように「たわみ」ではないからである。

2）興味深いのは，我々がまず観察することのできる系uに対して，このような非自己随伴の場合，もう一つの物理量を導入することにより，はじめて系が閉じることである。しかもその系は確かに原系を示すシステムの中に式(26)の形で存在する。この場合，もしLagrangeの関数がエネルギの次元を有するならば，vはたわみではなく力の次元を有するものとなっているはずである。

5．変分原理によるシステムの理解と洞察

以上述べたLagrangeの原理によりあらゆる既知のシステムについて変分原理を再構成して示すことができるはずである。たとえば，固体や流体の力学系では変形の系の随伴系は力の系であり，適切な目的関数のもとでは構成式も自然に導かれる。Navier-Stokesの式は汎関数がないとされているが，随伴変分原理としての汎関数（Lagrange関数）は存在し系を閉じることができる。ただ，既知のシステムのすべてを思い出すことのできる人にはこのことに何の効用も認められないかも知れない。

しかし，保存系の場合でも汎関数を知らないとき，それを導くのは一般に困難である。このような状態を含めて，これまでの結果をまとめてみると，Lagrange関数の考え方に次のような効用があるものと考えることができる。

1）目的関数の設定には発見的なところが残されるが，Lagrangeの原理は単調作業として汎関数の導出を可能とする。

2）実際に我々が観測することのできる原系の関係から，その裏の系を自然な形で予測することができる。

3）そうすることにより，系全体のより深い理解が達成される。

やや独断的であるが，これらの議論を発展すると，Lagrangeの原理の考え方にはさまざまな発展形が考えられることに気が付く。それらを以下に列記する。

4）随伴系に対するより深い理解は，新しい発展への一つの道ではないか？：このことはニュートンの万有引力の発見にみられる。凡人にとってリンゴの落下は単に等加速度運動という一つの運動の発見に過ぎないが，彼は引力の系をその随伴系として見た。

5）与えられた問題が極めて取扱い困難な場合，多くの場合その裏の系が認識されないものとして放置されているのではないか？：このことは物理系以外のシステムではよくあることである。

6）閉じない系を閉じさせるという意味で我々は物理の基本則（保存則など）から解放されるのではないか？：成長する固体の問題などは古典的熱力学の範ちゅうでは扱えない。

7）我々には裏の系が時々見えるのではないか？：裏の経済，東洋医学などはそれである。

8）随伴系は自然な形で導出される。これをコンピュータにやらせることにより，ある意味でそれは知能的コンピュータとなるのではないか?:転置行列系は随伴系である。計算機にとってこれは簡単な作業である。

9）脳は認識し，連想し，想像する。そこで，脳は随伴系を想起させる随伴原理マシーンであると考えられないか？：知覚される観察系に対してヒトは，そのヒトそのヒトの目的関数で思いをめぐらす。めぐらす思いそのものは随伴系である。

議論が途方もない方向へ発展しそうである。ご批判を頂きたい。なお，本文はＮＣＰ研究会・機械学会関西支部,機械の機能と形態研究懇談会シンポジウム（昭和62年２月）で話題提供したものをまとめたものである。

参考文献

1）P. Whittle, Optimization under Constraints, Theory and Applications of Nonlinear Programming, (1971), Wiley-Interscience

2）瀬口，非保存系の変分原理に関する一考察，機械学会講演論文集，No.834-1，（昭和58年３月）pp.18～20.