# 凸解析と偏微分方程式

研究ノート

丸　尾　健　二*

## 1．はじめに

“自然は非線型である”といわれている。つまり自然を良く近似すると信じられている数学モデルは非線型である。しかし任意の非線型性を有する偏微分方程式を取り扱う一般論は，未知関数がある意味で小さいとして見い出される線型の偏微分方程式が持っているきわめて美しい一般論と同様な物は，到底いまのところ望めそうにない。そこで本稿では，いわゆる“ポテンシャルエネルギー”と称される量に着目し，その量を最小にする様な非線型，線型の物理現象に対応する数学モデルのグループに対し，凸解析の数学的理論を適用させる事を簡単に紹介したい。

## 2．凸関数と楕円型方程式

$\Omega$ は $R^3$ の中で有界で境界が滑らかな領域としよう。ここで $R^3$ の点 $X=(x_1, x_2, x_3)$ と表わし $\partial\Omega$ は $\Omega$ の境界とする。まずPerssionの方程式（一様な等方性の物体の中で熱的な定常状態を表す方程式）

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)=f(x) \quad \text{for} \quad x \ \varepsilon\,\Omega, \\
&\qquad u(x)=0 \quad \text{for} \quad x \ \varepsilon\,\partial\Omega
\end{aligned}
\tag{1}
$$

を考察する。この方程式のポテンシャルエネルギーと称される汎関数

$$
\Phi(v)=\int_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial v}{\partial x_i^2}(x)\Big)^2-f(x)\,v(x)\Big\}\,dx \tag{2}
$$

と(1)の方程式の関係を調べる。まず $H_1(\Omega)$ と書かれる関数空間を導入する。この空間は概して言えば境界で0になり一階微分した関数の二乗が有界となる関数全体の事である。ここで $H_1(\Omega)$ の任意の元v に対して $\Phi(v)$ を考えて，v を $H_1(\Omega)$ の中を動かしたとき $\Phi(v)$ の最小値をとる元をuと置くと，

$$
\Phi(v)-\Phi(u) \geqq 0 \quad 任意の\, v\,\varepsilon\,\mathring{H}_1(\Omega) \tag{3}
$$

を満たす。形式的な計算をしてみると，因数分解と部分積分を行なう事により，

$$
\int_{\Omega}\Big(-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)-f(x)\Big)\cdot(v(x)-u(x))\,dx \geqq 0
$$

を得る。v が任意の元である事より u が(1)の方程式の解である事が導びかれる。すなわち汎関数 $\Phi(v)$ を最小にする関数uが(1)の解である。又

$$
V=\{u\ \varepsilon\,\mathring{H}_1(\Omega);\ u(x)\geqq v(x) \ \text{almost where} \ x\ \varepsilon\,\Omega\}
$$

と置き

$$
\Phi(v)=(2)の\ \Phi(v) \quad \text{if } v\ \varepsilon V:\ \Phi(v)=\infty \quad \text{if } v\ \varepsilon H_1(\Omega)-V
$$

とする。さて

$$
\underset{v\,\varepsilon H_1(\Omega)}{\mathrm{Min}}\ \Phi(v)=\Phi(u)
$$

となるuは次の方程式

$$
\begin{cases}
-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)=f(x) \ \text{if } u(x)>v(x) の点\ x\ \varepsilon\Omega \\
u(x)\geqq v(x) \ \text{a.e} \ x\ \varepsilon\Omega:\ u(x)=0 \ \text{if}\, x\ \varepsilon\,\partial\Omega
\end{cases}
\tag{3}
$$

を満す解となる。すなわち片側制限付きのPorssion方程式の解と考えられる。これはもはや線型方程式ではない。この様にポテンシャルエネルギーと考えられる汎関数 $\Phi(v)$ とそれを定義する空間を適当に選ぶ事により，たとえば

*丸尾健二（Kenji MARUO），大阪大学工学部，応用物理学科，講師，理学博士，数学(解析学)

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u^{\gamma}(x)=f(x) \quad x\,\varepsilon\,\Omega\ : \qquad (4)$$
$$u(x)=0 \quad x\,\varepsilon\,\partial\Omega$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)=f(x) \quad x\,\varepsilon\,\Omega\ : \qquad (5)$$
$$-\beta(u)\ \varepsilon\ \frac{\partial u}{\partial n} \quad x\,\varepsilon\,\partial\Omega$$

等の非線型（楕円型）偏微分方程式を取り扱う事ができる。ここで$\gamma>0$で$\beta(\cdot)$は単調増加な多価も許す$R'$から$R'$への関数である。たとえば$\beta(t)\equiv 0$（任意の$t$）とすればNaumann境界条件，$\beta(t)=t^4-t_0^4$ if $t\geqq t_0>0$：$\beta(t)=0$ if $t<t_0$とすればStefan-Boltzmannの放射法則を満す境界条件，$\beta(t)=-\infty$ if $t<t_0$：$\beta(t_0)=(-\infty, 0]$：$\beta(t)=0$ if $t_0<t<t_1$：$\beta(t_1)=[0,\infty]$：$\beta(t)=\infty$ if $t<t_1$ とすれば，境界上で$t_0\leqq u\leqq t_1$にcontrolする境界条件となっている。特に$t_0=t_1=0$の場合がDirichelt境界条件である。又(4)に対しては，比熱，熱伝導率共に温度に関係する数学モデル化した熱伝導方程式の定常解となっている。

ではどの様な関数空間でどの様な汎関数$\Phi(\cdot)$であればその空間の中で最小値を見つける事ができるだろうか。Xを実Banach空間，$\Phi(\cdot)$はXから$(-\infty,\infty]$への汎関数とする。もちろん$\Phi(\cdot)\equiv\infty$は除く。

（A）$\Phi(\cdot)$が凸関数とは，$0\leqq\lambda\leqq 1$に対し$\Phi(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)\leqq\lambda\Phi(v_1)+(1-\lambda)\Phi(v_2)$を満す。

（B）$\Phi(\cdot)$が下半連続とは，$\lim_{n\to\infty}u_n=u$ in X とする，このとき$\underline{\lim}_{n\to\infty}\Phi(u_n)\geqq\Phi(u)$を満す。

定理1

（A）と（B）を$\Phi(\cdot)$が満しかつ$\lim_{|u|_X\to\infty}\Phi(u)=\infty$とする。このとき$\Phi(\cdot)$のXでの最小値が存在する。

この凸解析はMoreau[1]等によってなされBrezis[2]，Barbu[3]等により非線型楕円型方程式と称される（上記の例(3),(4),(5)等）方程式に活用されている。

## 3．熱伝導方程式

前節に介した（非線型）偏微分作用素Aを持つ熱伝導方程式を考察してみよう。

$$\frac{du}{dt}+Au=f：初期値\ u(o,x)=a(x) \qquad (6)$$

たとえば(4)に対しては，

$$\frac{du}{dt}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u^{\gamma}=f：u(o,x)=a(x)$$

となりこの方程式は多孔性媒質を通る流体の方程式となっている。(6)を考察する為にも変数tに関してのみ差分法を使用してみる。hは十分小の正数とする。変数xは省略する。(6)は次の様になる。

$$u(t+h)-u(t)+hAu(t+h)=hf\ より$$
$$(1+hA)u(t+h)=u(t)+hf：u(o)=a \qquad (7)$$

となる。故に帰納的に$u(0), u(h), u(2h), \cdots u(mh), \cdots$を作る事を考える。この為にAに附随している汎関数$\Phi(v)$とする時，次の新しい下半連続で凸な汎関数$\widetilde{\Phi}(v)$を次の様に決める。

$$\widetilde{\Phi}(v)=\int_{\Omega}\{\frac{1}{2}v^2-(u(mh)+hf)v\}\,dx+h\,\Phi(v)$$

これは定理1の仮定を満足している事がわかり$\widetilde{\Phi}(v)$の最小値の存在がわかりそれを$u((m+1)h)$とすればよい。ここで$0<t<T$に対して$mh\leqq t<(m+1)h$とし$\lim_{h\to 0}u(mh)=u(t)$を考察して$u(t)$を求めるとこのuは(6)の解となっている。

定理2

Hを実Hilbert空間とする。Hから$(-\infty,\infty]$への下半連続な凸汎関数$\Phi(\cdot)$は$\not\equiv\infty$としよう。この$\Phi(\cdot)$に付随した（非線型）楕円型作用素をAと書くと，

$$\frac{du}{dt}+Au=f\ \text{in}\ H：u(0)=a$$

を満す解uは唯一つ存在する。

この理論は，H.Brezisによって完成された。定理2は，等方性媒質での比熱，熱伝導率が温度に関係する場合の非線型熱伝導方程式や多孔性媒質を通る流体の方程式，境界や内部での温度制御問題に関する方程式等々に適用されている。

次に作用素Aが時間に関係する場合，即ち熱伝導係数が時間と共に変化したり，moving boundaryを考える時現れる方程式を考察してみよう。

$$\frac{du}{dt}+A(t)u(t)=f \text{ in } H : u(0)=a \tag{8}$$

A(t) に附随する汎関数の時間 t に関係して $\Phi^t(\cdot)$ と表わされる。これに関しては次の事が言える。t を止めるごとに $\Phi^t(\cdot)$ は定理２と同じ条件を満し $\Phi^t(\cdot)$ の時間的変化については,概して言えば, $\Phi^t(\cdot)$ の本質的定義域が時間に無関係なれば t に関して有界変動になっていて，本質的定義域が t に関係する場合は，定義域の変化の仕方も $\Phi^t$ の t に関する変化も Lipschitz 連続を満しながら変わるとする。このとき(8)の方程式の解は一意に存在する。
Maruo〔４〕，Yamada〔５〕

## ４．波動方程式

次に非線型波動方程式について考察してみる。

$$\frac{d^2u}{dt^2}+Au=f : u(0)=a : \frac{du}{dt}(0)=b$$

ここでＡは定理１に出てくる作用素とする。この問題に対しては解の存在，一意性共に未解決である。ただし次の様な特別な場合を考察してみよう。〔0, 1〕区間上に v(x) という障害物を置きその上に弦を張った時の弦の振動方程式や中間子方程式を含む様なＡに対して，(9)の方程式の解の存在は言える。Schatzman〔６〕, Maruo〔７〕。又〔0, 1〕上の障害物が時間に関して可微分的に変化した場合，その上に弦を張った振動方程式に関しても解の存在は示された。
Maruo（投稿中）。これらはＡに付随する汎関数に定理１以上の条件を付けて証明している。

解の存在もさる事ながら解の一意性に関する問題が大きな壁として存在しており，非線型波動方程式は難しい問題を含んでいると思う。

## 参考文献


1）J.J.Moreau, Bull. Soc. Math. France 93 (1965).
2）H.Brezis, J.Math. Pures Appl. 51 (1972).
3）V.Barbu, Noordhoff (1976).
4）K.Maruo, Proc. Jap. Acad. 51 (1975).
5）Y.Yamada, J.Fac. Sci Univ. Tokyo 23 (1976).
6）M.Schatzman, Nonlinear Analysis 2 (1983).
7）K.Maruo O.J.M. 22 (1985).