研究ノート

最適制御系の逆設計法

藤井隆雄*

1．はじめに

物を制御する，正確に制御理論の言葉で言えば，「動的なシステムの制御量を所望の制御目的に合わせて制御する」には，まず対象システムの動特性を数式モデルで表現し，つぎにそれを基に必要な制御入力（操作量）を何らかの方法で決定しなければならない。その決定に関して一つの有力な手法を与えるのが最適制御理論である。この理論は，設計仕様に合わせて設定された評価関数を，先に求めた数式モデルの制約条件のもとで最適化し，その結果得られる最適解を所望の制御入力として求めるものである。その中で最も良く知られかつ実システム制御へ最も多く応用されているのが，数式モデルを線形微分方程式で表現し，評価関数を操作量と制御量に関する2次形式積分の形で表した「最適レギュレータ理論」である。この理論に基づく従来の最適レギュレータ設計法は，設計仕様と評価関数の対応が明確でないなど実用に際して難点が多かった。本稿では，この設計法を全く新しい観点から見直すことによって改良した「最適レギュレータの逆設計法」を紹介する。

2．最適レギュレータ理論と設計法

最適レギュレータ理論に代表される現代制御理論では，制御対象の動特性，つまり制御入力ベクトル$u(t)$がシステムの状態ベクトル$x(t)$を通して出力ベクトル$y(t)$に及ぼす影響を

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1b)$$

のように，一階の線形常微分方程式で表現する。ここにA，B，Cは適切なサイズの実数行列である。そして(1)式の制約条件のもとで，yとuに関する正定値2次形式評価関数

$$J(u) = \int_0^\infty (y^T Q y + u^T R u)\,dt \quad (2)$$

を最小化する最適制御問題を「最適レギュレータ問題」といい，この問題を考案の対象とするのが最適レギュレータ理論である。一般に，制御入力uの評価は「制御性能の良さ」のみならず「制御入力の大きさ」も考慮に入れて行うことが望ましい。(2)式はこの点を考慮して，前者を出力偏差の2乗面積（第1項に相当）で，また後者を制御入力のパワー（第2項に相当）で表現し，さらにそれらを適当にバランスさせるためにそれぞれに重みQとRをつけて足し合わせたものである。このような評価のもとで出力を最適に制御してその偏差を0にする制御入力を求めるのが，最適レギュレータ問題である。最適レギュレータ理論によれば，この問題の解（最適制御入力）は，リカッチ方程式と呼ばれる非線形代数方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3)$$

の解Pを用いて

$$u(t) = -Kx(t), \quad K = R^{-1}B^T P \quad (4)$$

という形の状態フィードバック制御で与えられる。この結果を応用して以下の手順で最適制御を求めるのが，従来の最適レギュレータ設計法である。

1）正定対称な重み行列Q，Rを与える。

2）リカッチ方程式(3)の解Pを求める。

3）(4)式で最適レギュレータを求める。

この最適レギュレータ設計（LQ設計ともいう）法は，それが提案された当初から実用上の難点

*藤井隆雄（Takao FUJII），大阪大学工学部，電子制御機械工学科，助教授，工学博士，制御工学

がいろいろ指摘されてきた。その最大のものは，(2)式の評価関数が具体的な設計仕様と直接結びつかないために，与えられた設計仕様に応じて重みQ，Rをどのように選定すれば良いかの具体的な選定指針がないことである。例えば，最適制御系が所望の出力応答をするように重みを選定しようとしても，評価関数の重みと最適制御系の応答との関連が明確でないために，重みの選定は煩わしい試行錯誤に頼らざるを得ず，その選定は決して容易ではない。これ以外にも手順2の設計計算や手順3で得られる設計結果（フィードバック則Kの構造）が簡単でない，などの難点も指摘されている。

以上のような設計上の難点はあるものの，設計の結果得られる最適レギュレータは，重みの選択によらず常に低感度特性やロバスト安定性など実用上好ましい特長を持つことが知られている。これらの点を考慮すれば，LQ設計では従来のように重みを指定して最適制御を求めるよりも，むしろ何かの重みに関して最適であるような状態フィードバック制御を求め，もって最適レギュレータの特長を残したまま設計を簡単化する方が実用上得策である。

筆者は，最近このような設計法を最適制御の逆問題の観点から構築し，従来法の難点を理論的に解消するとともに，それを実システムの制御に応用して良好な結果を得たので，以下この設計法の概要を紹介する。

3．最適制御系の逆設計法（ILQ設計法）

3.1 最適レギュレータの逆設計法[1)]

すでに述べたように，最適制御問題は評価関数を与えてそれを最適化する制御入力（最適制御）を求めるが，逆に制御入力を先に与えてそれが最適制御になるような評価関数を求める問題を「最適制御の逆問題」という。この逆問題では，対応する評価関数を求めるよりも，むしろそのような評価関数が存在する条件，つまり与えられた制御入力が何かの評価関数に関して最適制御になるための条件（最適性条件）を求める方が工学的な意義は大きい。この条件は，最適レギュレータの逆問題の場合で言えば，与えた状態フィードバックゲインKに対して(3), (4)式を同時に満たす正定対称行列Q，Rが存在する条件に他ならない。つぎの結果は，このような条件のうちでILQ設計法の基礎となる重要な条件を述べたものである。

【結果1】「システム(1)の係数行列Bが

$$B = [0 \quad I]^T \tag{5}$$

と表されるとき，最適制御則Kは，適当な正則行列Vと正定対角行列Σを用いて

$$K = V^{-1}\Sigma V[F \quad I] \tag{6}$$

と表現される。」

この結果を基にILQ法では，(6)式のV，Σ，Fを設計パラメータと考え，つぎの方針で最適制御則Kを設計する。

【設計方針】

1）適切な状態の座標変換 $x = Uz$ を行ってシステム(1)の係数行列をつぎの形に変換する。

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

2）Fを(A_{11}, A_{12})に関する極配置計算で定める。

3）Vを正則行列の範囲内で任意に定める。

4）(6)式のKが最適性の十分条件（省略）を満たすように，Σの対角要素$\{\sigma_i\}$を一定値σより大きく選ぶ。なお，$\{\sigma_i\}$は操作量と制御量間の妥協を計る調整パラメータとして用いる。

5）最適制御則Kを次式で定める。

$$K = V^{-1}\Sigma V[F \quad I]U^{-1} \tag{7}$$」

この設計法を用いれば，従来評価基準の重みを適切に選ぶことによって達成していた，a）閉ループ系の固有構造の指定，b）閉ループ極の部分極配置，c）完全制御などの制御目的がはるかに簡単に達成できる。その詳細は文献1）に譲り，以下では，本設計法の特徴が最も生かされる「最適サーボ系設計問題への応用」について，その概要を紹介する。

3.2 最適サーボ系設計への応用[2,3)]

線形定数システム

$$\dot{x} = Ax + Bu ; \quad A : n\times n, \quad B : n\times m \tag{8a}$$

$$y = Cx ; \quad C \equiv [c_1^T \cdots c_m^T]^T : m\times n \tag{8b}$$

に対し，その出力$y(t)$をステップ状の目標値変化$r = [r_1^T \cdots r_m^T]^T$に追従させる最適サーボ系

の設計問題を考える。通常このタイプの最適サーボ系は，システム(8)の代わりに，その前に積分器を配置した拡大システム

$$\dot{x}_e=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X e+\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} V$$

を考え，この拡大系に関する最適レギュレータ問題の解

$$v=-K_e x_e, \tag{9}$$

をもとに，つぎの制御入力によって構成される。

$$u=-K_F x+K_I \int_0^t (r-y)dt \tag{10}$$

ただし，

$$\begin{array}{c} \quad n \quad\; m \\ [K_F \quad K_I] \end{array} = K_e \Gamma^{-1},\ \Gamma \equiv \begin{bmatrix} A & B \\ C & O \end{bmatrix}$$

であり，行列Γは正則，つまりシステム(1)は原点に零点を持たないものと仮定する。

上記のＬＱ問題にＩＬＱ法を適用し，最適制御則Ｋを(7)式で特にＶ＝Ｉとした形で求めれば，先のサーボ系設計問題に対してつぎの設計手順が得られる。

【設計手順】

① 設計パラメータとして，n個の安定な指定極$\{s_i\}$およびm次元ベクトル$\{g_i\}$を選び，つぎの極配置計算でＦを決定する。

1） $t_i=(s_i I-A)^{-1}Bg_i \quad 1\leqq i\leqq n$

2） $F=-[g_1\cdots g_n]\ [t_1\cdots t_n]^{-1}\equiv -GT^{-1}$

② 基準最適ゲインK_0を次式で計算する。

$K_0\equiv[K_F{}^0\ \ K_I{}^0]=[F\quad I]\ \Gamma^{-1}$

③ 調整パラメータ$\{\sigma_i>0\}$の下限値σを

$$E=[GS-(T^{-1}B)^T]\ (-S-S^T)^{-1} \times[GS-(T^{-1}B)^T]^T+(FB)+(FB)^T \quad S\equiv \mathrm{diag}(s_1\cdots s_n)$$

の最大固有値で定め，σ_iを$\sigma_i>\sigma$なる範囲内で選ぶ。

④ $\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1\cdots\sigma_m)$とおき，最適サーボ系を図１のように構成する。

つぎに，上記の設計パラメータ$s_1\sim s_n$と$g_1\sim g_n$の選定は，後述するＩＬＱ最適サーボ系の漸近出力特性に基づいてつぎのように行う。

【選定手順】

① システム(8)の相対次数

$d_i=\min\{k\,|\,c_i A^k B\neq 0\} \quad 1\leqq i\leqq m$

を求め，つぎの指数$\{p_i\}$を定義する。

$p_1=1,\ p_{i+1}=p_i+d_i+1 \quad 1\leqq i<m$

② 各出力y_iに対応して，(d_i+1)個のユーザ指定極s_k，$p_i\leqq k\leqq p_i+d_i$を与え，対応する$\{g_k\}$を次式で定める。

$g_k=W(s_k)^{-1}e_i,\ p_i\leqq k\leqq p_i+d_i$

$(1\leqq i\leqq m)$

$\{e_i\}$：R^mの自然基底

③ 残りの$\{s_k\}$をシステム(8)の安定零点に選び，残りの$\{g_k\}$を対応する零点ベクトルに選ぶ。

この選定法はつぎの結果を基礎にしている。

【結果２】（漸近出力特性）

「システム(8)は不安定な零点を持たず，かつ非干渉化可能，つまり次の行列が正則であるとする。

$$D=[(c_1 A^{d_1} B)^T\cdots c_m A^{d_m} B)^T]^T$$

このとき，設計パラメータを上記手順で選定し，図１のＩＬＱ最適サーボ系を設計すれば，各出力応答$y_i(t)$は，調整パラメータ$\{\sigma_i\}$を大きくしたとき，伝達関係が

$$G_i(s)=\frac{\phi_i(0)}{\phi_i(s)},\ \phi_i(s)\equiv\prod_{k=p_i}^{p_i+d_i}(s-s_k)$$

で表されるシステムのステップ応答$z_i(t)$に漸近する。」

この結果に基づいてＩＬＱ法では，設計仕様を各出力の望ましい応答波形で与え，それに各出力の漸近応答$z_i(t)$が一致するように対応するユーザ指定極$\{s_k\}$を選定する。例えば，CBが正則したがって$d_i=0$ならば，$z_i(t)$は時定数$T_i=-1/s_i$の一次遅れ応答になることか

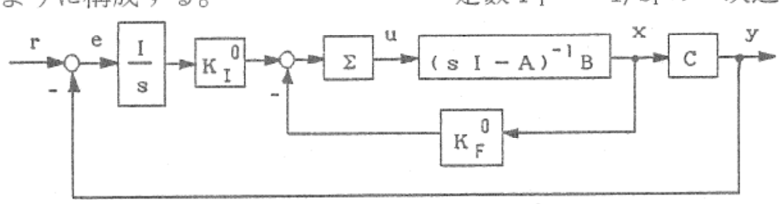

図１　ＩＬＱ最適サーボ系

ら，設計仕様をy_iの望ましい一次遅れ応答時定数T_iで与え，それをもとにs_iを$s_i=-1/T_i$と選定すればよい。なお，調整パラメータ$\{\sigma_i\}$の値は，出力の追従特性と制御入力の大きさとの間のトレード・オフによって決定する。参考のために，設計結果の一例を図2に示す。これは，$y_1(t)$を2次遅れ応答，$y_2(t)$を一次遅れ応答に指定する場合（つまり$d_1=1$，$d_2=0$の場合）であり，調整パラメータを大きくすれば，最適サーボ系の各出力応答は目標の応答に漸近し，制御入力u_1，u_2は次第に大きくなっていく様子が読み取れる。

4．おわりに

以上述べたようにＩＬＱ設計法は，従来法に比べて設計計算および設計パラメータの選定が簡単であるだけでなく，「各出力の応答波形が独立に指定できる」という実用上非常に好ましい特長がある。さらに，基準となる最適ゲインK_0がシステム行列とユーザ指定極とによって解析的に表現される，という従来法にみられない特長もある。この解析表現（省略）から，図1のフィードバック構造（つまり，どの状態からどの入力にフィードバックループがあるか）が明らかになるとともに，多くの場合その構造が簡単になって，制御系構成の簡単化につながるという利点もある。最後に，本設計法はすでに実システムへ適用[4]され，その有効性が実証されていることを付記しておく。

参考文献

1）T. Fujii: A New Approach to the LQ Design from the Viewpoint of the Inverse Regulator Problem, IEEE Trans. Automatic Control, AC-32-11, 995/1004 (1987).

2）藤井，水島：ＬＱ設計への新しい試み—最適サーボ系設計への応用，計測自動制御学会論文集，23-2，129/135 (1987).

3）藤井，下村：ＩＬＱ最適サーボ系設計法の一般化，システム制御情報学会論文誌，1-6，8/17(1988).

4）河原林，藤井：ＩＬＱ法によるエンジン試験装置のサーボ系設計，電気学会論文誌D,8,965/971(1987).

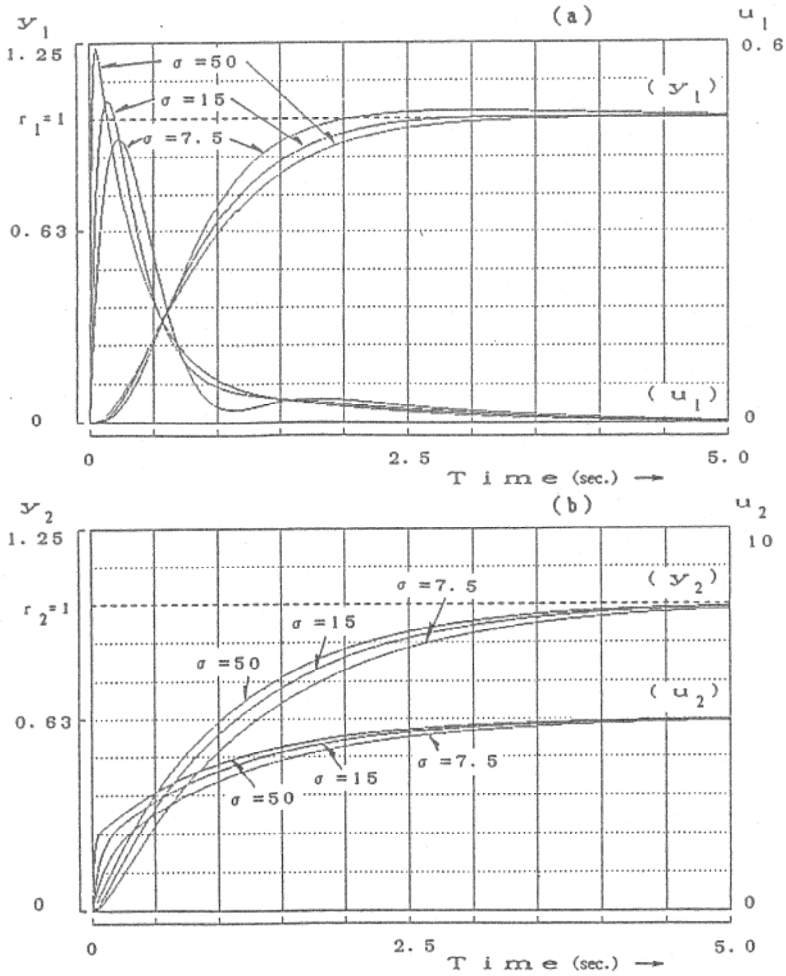

図2　ＩＬＱ最適サーボ系のステップ応答