

# 工学における逆問題解析の応用

—電気ポテンシャル情報を用いたき裂同定を例にして—



久保 司郎\*, 大路 清嗣\*\*

## 1. はじめに

逆問題あるいは逆解析ということばが次第に市民権を得てきている<sup>1-5)</sup>。逆問題とは、ひとことでいえば、通常行われる原因から結果を予測する順解析とは逆に、結果から原因を探ろうとするものである。逆問題解析の成功例および典型例としては、医学の分野では多方向からのX線像をもとに断層像を再構成するX線CT(Computed Tomography)、原子物理学の分野では粒子の散乱スペクトルから散乱のもとになったポテンシャル場を求める逆散乱問題がある。このほか、遺跡や遺物をもとに古代の生活や事件を推定する問題や、重力探査の問題も逆問題として捉えることができる。

工学に範囲を限定すると、その中で取り扱う問題としては、入力を与えてそれに対する応答を求める順方向のものが数多くある。しかし、応答が観測などにより与えられていて、それを引き起こさせた入力を知りたいという状況も少なくない。このように、工学においても逆問題解析の必要性は大きいものと考えられる。

科学一般についてみても、入力として必要なすべての情報が完全に与えられているという状況は必ずしも一般的ではない。むしろ特殊なものといえよう。我々が何らかの現象を把握しようとするとき、最初に与えられるものは現象の観察結果である。観察をもとに現象を理解する

過程は逆問題にほかならない。設計においても状況は似ており、我々には最初に目標あるいは設計指針が与えられる。この目標なり指針を達成するような入力を求める過程も逆問題のひとつである。このように逆問題は、科学・工学において我々が遭遇する本質的な問題であることが理解できよう。

## 2. 逆問題の定義

それでは、どこまでが逆問題であるのか。逆問題が広範な意味を持つため、その定義はややもすると曖昧になってしまう。

逆問題の定義は、順問題を媒介にして与えることができる。すなわち、原因から結果を求める順問題では、結果を予測するためにいくつかの情報が必要となる。この必要な情報すべてが、入力である。もし、これらの中の一部に未知のものがあれば、順問題として取り扱うことはできない。提起された問題の中で、順問題としての取り扱いが実施できないような問題すべてが、逆問題である。

逆問題としては具体的にどのようなものがあるかを、物理量などの空間変化を扱う場の解析を例として考えてみる。現象あるいは状態を表現する何らかの量を $\phi$ で表す。 $\phi$ の空間変化あるいは時間変化を支配している微分方程式を用いて、 $\phi$ の応答を求める順解析がよく行われる。図1のように、この順解析を実施するためには、次のような情報が不可欠である。

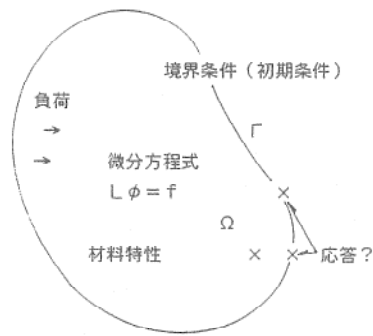
- (a) 対象としている領域 $\Omega$ と境界 $\Gamma$ の位置と形状
- (b) 物理量 $\phi$ に関する場の支配方程式
- (c)  $\phi$ およびその微係数に関する境界条件 (もし必要があれば初期条件も含む)
- (d) 外力あるいは負荷

\*久保司郎 (Shiro KUBO), 大阪大学工学部産業機械工学科, 助教授, 工学博士, 構造安全工学

\*\*大路清嗣 (Kiyotsugu OHJI), 大阪大学工学部産業機械工学科, 教授, 工学博士, 構造安全工学

(e) 材料特性の分布

これらの要件のいずれかが欠落しておれば、順解析を行うことはできない。上述の議論より、逆問題は順問題以外のものであると考えることができる。したがって、場の問題では、(a)から(e)までのいずれかあるいは2つ以上の組み合わせが未知であるときに、これらを同定しようとするものが逆問題解析である。上記の(a)から(e)と対応する逆問題としては、

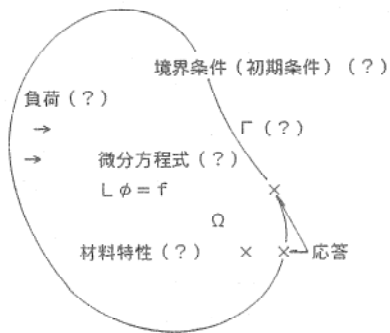


(a) 順問題

- (a) 領域Ωと境界Γ
- (b) 場の支配方程式
- (c) 境界条件(初期条件) → → → → 応答
- (d) 外力、負荷 (Γ上の未知境界値)
- (e) 材料特性 (Ω内の物理量φ)

(b) 順問題解析

図1 順問題解析



(a) 逆問題

- (a)' 領域Ωと境界Γの一部
- (b) 場の支配方程式
- (c) 境界条件(初期条件) → → → → (A) 未知境界
- (d) 外力、負荷 ↑
- (e) 材料特性 応答
- (Γ上の過剰な境界値)
- (Ω内の物理量φ)

(b) 逆問題解析の例(未知境界の同定)

図2 逆問題解析

- (A) 領域Ωの形状を求める問題。物体内にある未知境界を同定する問題。
- (B) φの場を支配している微分方程式を求める問題。
- (C) 境界Γの一部あるいは全部における境界条件あるいは初期条件を求める問題。
- (D) 領域Ωの内部あるいは境界部Γで作用している外力あるいは負荷を求める問題。
- (E) 領域Ωの内部あるいは境界部における材料特性を推定する問題。

がある。このように、逆問題としては種々のものがあることがわかる。

逆問題解析では順問題解析に比べて情報が不足しているために、そのままでは解析を行うことができない。このため、上記の(A)から(E)の問題を解くためには、何らかの補助情報が必要である。この目的のために利用できる情報の主なものは、図2に示すように、順解析で解析の対象とした出力、すなわち応答である。応答としては、領域内あるいは境界上で得られたφおよびその微係数など種々のものとそれらの組み合わせが考えられる。応答を計測などにより収集し総合することにより、未知量を推定することが可能となる。

3. 電気ポテンシャル情報を用いたき裂同定

次に、工学における逆問題解析の応用の代表例として、著者らが提案している電気ポテンシャルCT法<sup>6)</sup>による、電気ポテンシャル情報からのき裂同定<sup>7-10)</sup>について説明を行う。

3.1 逆問題としての電気ポテンシャルき裂同定

構造物の健全性を評価するためには、その構成部材の中に製作時から含まれているき裂あるいは使用環境下で成長してきたき裂を、適当な方法で検出し監視することが重要となる。また材料のき裂成長速度を求める試験においても、き裂の形状と大きさを測定する必要がある。このような目的のために、種々の非破壊検査法が提案され、利用されている。その中のひとつに直流電気ポテンシャル法がある。これは、物体にき裂が存在するとき物体の電気抵抗に変化が生じることを利用して、き裂を有する物体に直

流電流を流したときの物体表面の電気ポテンシャル値あるいはその分布よりき裂の位置、形状および寸法を測定しようとするものである。このように、電気ポテンシャル法では、物体表面上に現れた電気ポテンシャル分布という応答をもとに、電気ポテンシャル分布の変化の原因となっているき裂の存在位置と形状および寸法を求めようとしており、この問題を逆問題のひとつとして捉えることができる。

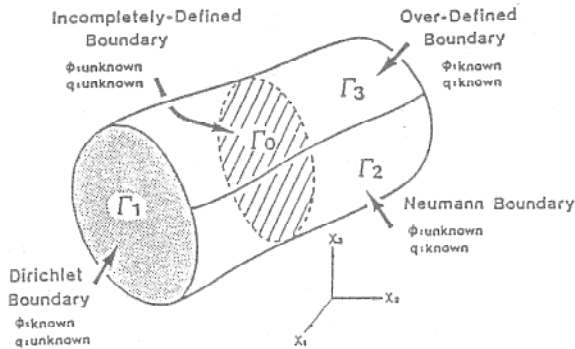


図3 電気ポテンシャル法によるき裂同定における境界条件

この逆問題は図3のように表すことができる。き裂を含む物体を領域 $\Omega$ で表すと、その表面には電気ポテンシャル $\phi$ が規定されている(Dirichlet型境界条件が与えられている)境界、すなわちDirichlet型境界 $\Gamma_1$ と、流束 $q$ が規定されている(Neumann型境界条件が与えられている)境界、すなわちNeumann型境界 $\Gamma_2$ とがある。この物体にはき裂が存在するため、内部に自由表面を含む面 $\Gamma_0$ が存在する。き裂の存在位置が未知であるため、 $\Gamma_0$ 上の境界値をあらかじめ指定することはできない。 $\Gamma_0$ を指定することもできない場合もある。このような境界 $\Gamma_0$ は不完全規定境界とよぶことができる。 $\Gamma_0$ の存在により情報量が不足することになる。この不足を補うため、き裂の存在により電気ポテンシャル分布が変化している $\Gamma_2$ の一部で、電気ポテンシャル分布を測定する。 $\Gamma_2$ 上で流束が規定されているので、この上では $\phi$ と $q$ がともに規定されていることになる。このような境界は過剰規定境界 $\Gamma_3$ とよぶことができる。 $\phi$ が規定されている $\Gamma_1$ の一部において流束 $q$ を測定しても、同様に過剰規定境界 $\Gamma_3$ を作り出すことができる。

直流電流を通電したときの電気ポテンシャル値 $\phi$ の分布は、2階の偏微分方程式で与えられる。特に、電気伝導率が空間的に一定であるものとするれば、支配方程式はLaplaceの式となる。このようなLaplaceの式に対する場の解析には境界要素法が有効である。付加情報が境界上で与えられ、未知量も境界に関連しているという点でも、境界を分割する境界要素法が解析には適している。これらのため、以下で述べるように、電気ポテンシャルCT法で用いるふたつの逆問題解析法では境界要素法が利用されている。

### 3.2 逆問題解析手法とき裂同定結果

#### 3.2.1 未知境界同定法

上記のき裂同定問題を解くための解析手法のひとつは、未知境界同定法と呼ばれている。この方法の原理は、き裂存在面 $\Gamma_0$ が既知である場合に $\Gamma_0$ 上の流束 $q$ の分布を求め、 $q$ が零となる部分よりき裂を同定することにある。したがって、この方法ではき裂という未知境界の同定問題が境界値の同定問題に置き換えられることになる。

図3を用いて、未知境界同定法の解析法の基礎について説明する。き裂存在面 $\Gamma_0$ により物体 $\Omega$ を部分物体 $\Omega_1$ および $\Omega_2$ に分割したとき、 $\Omega_1$ と $\Omega_2$ のいずれか一方の全境界を、き裂存在面 $\Gamma_0$ を含め、 $\Gamma$ で表現する。境界要素法の定式化を用いれば、 $\Omega_1$ あるいは $\Omega_2$ の境界 $\Gamma$ を境界要素で離散化したとき、境界積分方程式より $\Omega_1$ あるいは $\Omega_2$ の境界上の節点の $\phi$ と $q$ を相互に関連づける式が得られる。この式に、過剰規定境界における $\phi$ と $q$ 、Dirichlet型境界における $\phi$ 、ならびにNeumann型境界における $q$ を代入すると、未知境界値に関する連立一次方程式が得られる。この式の近似解を最小2乗近似などを用いて求めれば、不完全規定境界 $\Gamma_0$ における $\phi$ および $q$ を含め、未知境界値が決められる。 $\Gamma_0$ において $q$ が零となる部分としてき裂部を推定することができる。

未知境界同定法の適用に関する数値シミュレーションが行われている。その結果によれば、境界値として正解を与えれば $\Gamma_0$ 上の $q$ を精度よく同定することができる。しかし、未知数の数

を増やすと解析結果は使用するデータに敏感になり不安定になる。 $\Gamma_0$ が既知であるときには $q$ の唯一性は保証されているが、そのような場合でも解が不安定となり適当な結果が得られにくいことが多い。このような場合に対しては、先験情報などを拘束条件として組み込むと良好な結果が得られることがある。

### 3.2.2 境界残差最小化法

もうひとつの逆問題解析法は、仮定き裂に対する電気ポテンシャル分布の計算結果と測定結果の残差が最小となるき裂を推定結果とするものであり、境界残差最小化法と呼ばれている。

この方法では、まずき裂存在面 $\Gamma_0$ およびき裂の形状および寸法を種々に仮定する。このとき、不完全規定境界 $\Gamma_0$ において境界条件を指定することができる。すなわち、不完全規定境界 $\Gamma_0$ の位置は定まり、 $\Gamma_0$ の中のき裂部では流束 $q$ が0に規定され、それ以外の部分では、ポテンシャル $\phi$ と流束 $q$ に関する連続性が成立することになる。過剰規定境界 $\Gamma_3$ においては境界条件として流束 $q$ のみに関するものを使うことにすると、このときの境界条件は順解析に対するものになる。この境界条件を用いて境界要素法により電気ポテンシャル分布の解析を実施すると、 $\Gamma_3$ における電気ポテンシャル分布が求められる。この境界要素計算結果と測定結果の間の残差を過剰規定境界 $\Gamma_3$ 上で計算する。種々に仮定されたき裂の中で、残差が最小になるき裂を推定結果とする。

境界残差最小化法によれば、非常に多くのき裂位置、形状および寸法に対して境界要素計算を実施する必要がある。き裂を精密に仮定すればするほど、仮定き裂数は急速に多くなる。このため、き裂同定の初期段階ではき裂をおおまかに仮定し、その結果を参照して順次き裂の仮定を精密にする階層化法が採用されている。特に、3次元き裂では計算が膨大になるので、2次元近似解析と3次元詳細解析を併用する階層化が、き裂の段階的精密化と組み合わせて用いられている。

き裂存在面が既知である場合に対して、2次元試験片におけるき裂の位置を、境界残差最小化法により求める実験が実施されている。また、

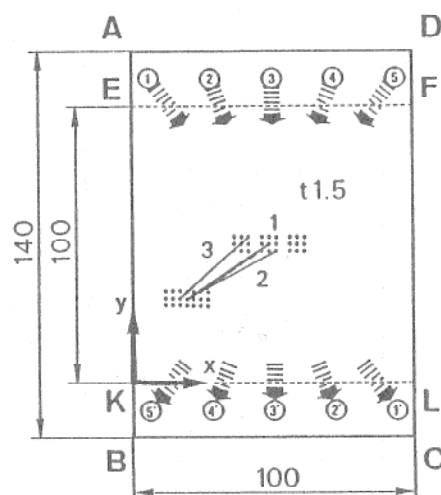


図4 2次元斜めき裂

図4に破線で示された2次元斜めき裂を、側面EK, LF上のポテンシャル分布から同定する実験が実施されている。斜めき裂のようにき裂存在面が未知である場合には、単一の電流負荷に対する側面上の電気ポテンシャル分布のみを用いた場合には情報量が不足し、解の一意性はない。2次元き裂に対しては2個以上の、3次元き裂に対しては3個以上の適当な電流負荷方向に対する電気ポテンシャル分布が必要である。このため、図4のように①—①', ②—②', …の組み合わせに対する電気ポテンシャル分布を用いるマルチ電流負荷方式が提案されている。このとき、境界残差最小化法により最尤き裂を決めるための指標としては、各電流負荷方向に対する残差平方和を電流負荷方向についてさらに総和をとったものが採用された。

図4には、小さな残差を与える上位3番目までのき裂が実線で表されている。図より明らかなように、マルチ電流負荷方式の採用により実き裂(破線)に近い推定結果が得られている。

図5のように、物体内に存在する3次元き裂の存在面およびき裂形状に対しても境界残差最小化法に基づく同定がなされている。この問題を最初から3次元問題として取り扱おうと計算量が多いため、2次元近似走査解析が実施されている。すなわち、図5のPQRSTのような2次元走査面を設け、この面があたかも2次元領域であると考え、2次元き裂に対する境界残差最

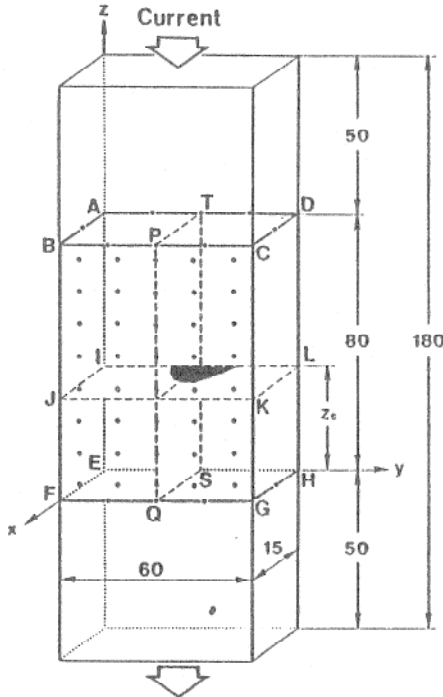


図5 3次元内部き裂と2次元走査面

小化法が適用されている。この2次元近似走査解析によれば、き裂存在面のおおよその位置が決められるが、3次元性の影響が大きいので、大きく歪曲された推定き裂形状が得られる。

3次元解析により、表面き裂の位置と形状を同定した結果の例を、図6に示す。この同定には、き裂の開口側表面および背面のポテンシャル分布が使用されている。き裂開口側表面と背面の両方のポテンシャル分布を使用する場合でも、またポテンシャル分布が背面のみで与えられる場合でも、き裂存在面の高さ  $z_c$  の推定結果 (32.0) は実き裂の値 (32.2) にほぼ等しい。また、ハッチングで表された推定き裂形状は破

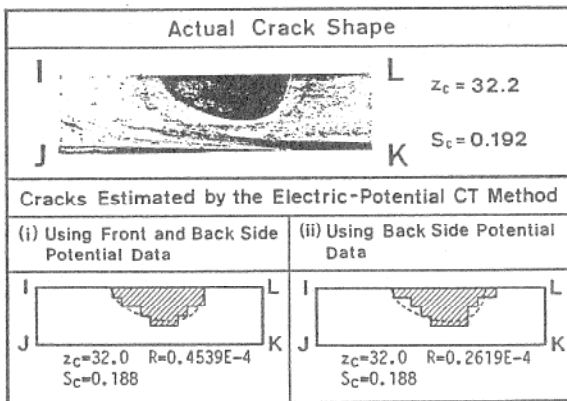


図6 3次元表面き裂の同定結果

線で表された実き裂のそれに近い。このように、電気ポテンシャルCT法により、合理的なき裂同定が可能であることがわかる。拡散接合により作成された内部き裂に対しても、電気ポテンシャルCT法による同定が有効であることが実験的に確かめられている。

#### 4. おわりに

逆問題解析では、現象の支配方程式、境界値物性値などで手に入る情報を最大限に利用し総合することにより、真に得たい情報を推定しようとする。得たい情報の影響は空間的に急速に減衰するため、測定値にはそれがわずかにしか入っていないことも多いが、それを集積することにより、推定が可能になる。

逆問題解析は幅が広いので、そのどれに対しても適用できるような一般的解析スキームはない。しかし、研究はさまざまな分野で展開されている。今後の発展に期待したい。

#### 参考文献

- 「特集 逆問題」, 数理学, No. 274 (1986).
- 久保司郎: 機械学会関西支部第146回講習会「境界要素法の基礎と実際問題への応用」の「7 破壊力学と逆問題への応用」, (1986), 77.
- 久保司郎: 材料, 36-406 (1987), 771.
- 久保司郎, 大路清嗣: 「境界要素法の応用」の「第10章 逆問題解析への応用」, コロナ社 (1987), 181.
- S. Kubo: JSME Int. J., Ser. I, 31-2 (1988), 157.
- 大路清嗣, 久保司郎, 阪上隆英: 機械学会論文集 (A編), 51-467 (1985), 1818.
- 大路清嗣, 久保司郎, 阪上隆英: 機械学会論文集 (A編), 52-477 (1986), 1352.
- S. Kubo, T. Sakagami & K. Ohji: Int. Conf. on Computational Mechanics, Springer, (1986), V-339.
- 阪上隆英, 久保司郎, 大路清嗣: 境界要素法論文集 3 (1986), 243.
- 大路清嗣, 久保司郎, 阪上隆英, 橋本 健: 材料, 35-395 (1986), 942.
- 阪上隆英, 久保司郎, 橋本 健, 山脇 弘, 大路清嗣: 機械学会論文集 (A編), 53-490 (1987), 1598.

- 12) 久保司郎, 阪上隆英, 大路清嗣: 機械学会論文集 (A編), 55-519 (1989), 2316.
- 13) 久保司郎, 阪上隆英, 大路清嗣, 橋本 健, 松室義隆: 機械学会論文集 (A編), 54-498 (1988), 218.
- 14) S. Kubo, T. Sakagami & K. Ohji: Int. Conf. on Computational Engineering Science, Springer, (1988), 12.i.1.
- 15) 阪上隆英, 久保司郎, 大路清嗣, 山本賢治, 中塚顯二: 機械学会論文集(A編), 56-521 (1990), 27.
- 16) T. Sakagami, S. Kubo & K. Ohji: Nondestructive Evaluation: NDE Planning and Applications, ASME, NDE Vol.5, (1989), 157.

