半無限体の動的Green関数を求めて

研究ノート

馬 場 研 介*

1. は じ め に

建築の分野では人間生活の場を創ることを目標としているが，人間の生活は実に多様にして複雑であるから，それに対応するべき研究分野も多岐に渡るのは当然のことであろうか．筆者の専攻する耐震工学の部門は安全な建築物を創るという最小限の要求に対応したきわめて基本的な研究分野である．つまり，地球物理学で言われているプレートテクトニクスの理論によれば地球表面はおよそ20枚のプレートでモザイク状におおわれ，しかもそれぞれのプレートは年間数cmの移動量があるという．地球儀をながめればユーラシア大陸を縁どる首飾りのように配置されている日本列島は，その実これら巨大なプレート群がひしめきあって隆起・沈降しているきわめて危険な場所にある．そこに超高層の建築物が林立する大都市群を擁して生活している様は，地震がほとんど発生しない地域に居住している人々から見れば涙ぐましい努力をしていると想像されるに違いない．

ところで，地盤と動的に連成する構造物系の地震応答解析を実施する際，それを連続体の境界値問題と見ればかねてよりGreenの公式を用いる手法が知られていて，近年の計算機の発達に伴っていわゆる境界要素法を用いた数値シミュレーションが工学の分野でも広く活用されるに至ったことは周知のことである．この手法は地盤内部を伝播する地震波動の問題等に適用するのにも都合がよく，媒体特性を表現するGreen関数が準備されていればなお都合がよい．この地盤ないし大地について古来より人々はそれがあたかも果てしない地平をもつ不動の半無限体であるかのように想定し，その天空を星座がかけめぐると説く天動説を盲目的に信じていた．16世紀になってコペルニクスやガリレイが唱える地動説に基づき果てしなく続く大地の概念はくつがえされ，有限な半径をもつほぼ球形状の地球として理解されるに至った．しかし建築物の立脚する基盤モデルを設定する場合には地球の有する相対的な大いさとその内部を伝播する波動の逸散現象を説明するために半無限媒体を採用して，コペルニクス以前の天動説の世界に身を委ねている．半無限媒体の動的Green関数を追求する所以である．

2. Green関数について

いわゆるGreen関数とは物理学においてしばしば登場する原因と結果の因果関係を数理的基盤上で表現したものであり，量子力学におけるDiracの超関数に関する研究によって古典的な枠組を脱却し現代数学に基礎付けされた新しい関数概念に発展した．また，3次元的な体積分を2次元的な面積分に帰着させるGreenの定理を通してGreen関数を用いた体積分と面積分の和として媒体内部の物理量を表現するGreenの公式が導かれ，それはポテンシャル理論を背景にしたベクトル解析の分野において殊に有名である．このようにスマートな数理学上の研究成果を残したGeorge Green（英国人，1793−1841）という人物も，実は父親の経営する製粉屋で働きながら独学で勉強したとのことであり，我々大学に籍を置く者としては誠に頭の下がる思いである．

このGreen関数を設定する場としては線形空間が基本的であるので，ここでは線形則が成立する均質・等方な弾性媒体を扱うことにする．

* 馬場研介（Kensuke BABA），大阪大学工学部建築工学科，助手，工学修士，建築耐震工学

然るに地盤媒質は線形則に従う訳でもなく均質等方でもないであろうが，数理学上の基礎資料を作成するためにはこのような線形性を保有するケースから始めるのが妥当と考えられる．この媒体の微小要素における動的な釣合いは変位ベクトルに関して勾配（gradient），発散（divergence）および回転（curl）を表わす空間座標の微分演算子と時間に関する微分演算子ならびに２個の独立な弾性定数と分布質量を用いて表現される．そしてこの媒体が果てしなく広がっている全無限体であれば，その一点に集中的な外力を作用させる問題は外力の作用点がどの位置にあろうとも同型式であり，応答関数は外力作用点から測った距離に反比例する分布をもつことが知られる．このことは外力作用点付近の応答が限りなく大きくなることを意味しており，それゆえに原因としての外力と結果としての応答との関係を表示するGreen関数は特異性を有する．この特異性こそDiracによって超関数の概念を導入する糸口になった．次いで本稿で話を進めようとしている半無限体のGreen関数は前述の全無限体に対する場合に較べ何が異なるのであろうか．例えて言えば丸のまま１個のリンゴと半分に切断された切り口のあるリンゴ半個の違いであり，この切り口に相当するのが地表面に外ならない．切断される前のリンゴは内部応力が働いてくっついているのであり，切断後はその応力が解放されて境界面は自由（free）になる．半無限体ではその自由表面が水平方向に無限に続いているものと考える．ここで話を全無限体にもどして，その内部に設定された異なる２点に同じ大きさの集中力が働く場合には，その力の向きを同方向としたり逆向きにして２点の中間面に関する対称な問題や逆対称な問題が作成される．中間面においても応力の連続性は保障されなければならないので，対称問題の場合には同面に関する応力の面外成分がゼロとなり逆対称問題の場合には面内成分がゼロとなる．すなわち２点外力を考えることによって全無限体においても部分的に応力成分が解除された面が出来る．さらに残余の応力成分も解除することが出来ればそれは半無限体の問題と同等の意味をもつ．この応力解放の道具として物体力の作用していない波動方程式に対するポテンシャルを用いる．ポテンシャルに関する定義はベクトル解析等を扱った著書に譲ることとして，ここではポテンシャルに空間方向の微分演算を施すことにより変位や応力の成分が得られることを特筆するに止めたい．この変位ベクトル場はスカラー量の勾配を与えるスカラーポテンシャルとベクトル量の回転を与えるベクトルポテンシャルに分解することが出来る．前者は波動伝播面に垂直な成分をもつＰ波の存在を示し，後者は平行な成分をもつＳ波に対応している．３次元空間で独立に定義できる成分は３個であるが，上記のベクトル場ではスカラーポテンシャルに対応する１成分とベクトルポテンシャルの３成分を加えて４成分となりつじつまが合わない．これにベクトルポテンシャル自身がスカラーポテンシャル成分をもつことはないと規定した制限条件を付与して独立成分は３となる．この独立な３成分がそれぞれ分離された形でベクトル場を表現することは一般的に困難であるが，空間座標をCartesian系（x，y，z）や円筒系（r，θ，z）等に選べば分離可能であるとP.M.MorseやH.Feshbachは指摘している．[1] 以上のようにして得られたポテンシャルより導かれる応力成分を用いて，先に述べた２点外力をもつ全無限解の残余応力成分を解除すれば半無限体に対する解析が完了する．ただし全無限体の対象とする空間領域に対し，ポテンシャルを導入した領域は半空間であるのでここでは両者の重なり合う部分のみ考慮していることになり，重なり合わない部分について冷淡ではないかと言われそうであるが，このような重ね合わせの手法を用いる場合には対象領域のみ検討していれば事足りるはずである．

３．解析結果について

点源をもつ全無限体の解は前節で述べているようにその関数形が判明している．従って半無限体については全無限解に重ね合わせるべきポテンシャル表現を呈示すれば，その全体像が浮かび上がることになる．一例として円筒座標系の上で表わされた周波数領域のポテンシャル成

分は同座標系に対応したHankel変換に伴う波数域の無限積分で表示できる．ところがこの変換の基底要素であるBessel関数は無限域への収束性が非常に緩やかであり，それに応じて波数域の無限積分も仲々収束しない．この傾向は他の座標系を採用しても同様であるので，数値解析を簡易に実行するために一工夫必要であろう．詳細は参考文献[2]で述べているので割愛するが，要は複素平面上に設定した周回積分を評価することによって上記の無限積分が有界積分で表わされるCauchyの主値とRayleighの極と言われる複素特異点まわりの留数との和に変換され，数値演算を比較的容易に実施できることが明らかとなった．この応答表現によればP波やS波の実体波に基づく寄与をCauchyの主値で表わし，自由表面上を伝播する表面波の発生を留数項単独で示すので，数理的表示と物理的な意味との対応が明快に説明される．

本手法を用いた解析例を図1および2に示した．半無限体内部に鉛直方向の集中力を加えた時に自由表面上に現出する鉛直方向の変位成分を周波数領域で表わし，図1の(a)は2点源をもつ全無限解，(b)はポテンシャルを用いて導入された自由表面の寄与，(c)は両者を合成して得られる内部点源をもつ半無限解である．さらに(b)で示した自由表面の境界条件を導入した効果を実体波に基づく成分と表面波に依存する成分に分解して，それぞれ図2の(i)，(ii)に掲載した．ここに外力振巾P，変位応答u，媒体のせん断剛性μ，ポアソン比ν，密度ρおよび規準長さa，入射角周波数ωを用いて次の無次元量を作成し図の縦軸と横軸の変数としている．

無次元変位応答：$\bar{u}=u\mu a/p$

無次元周波数　：$\bar{k}=\omega a\sqrt{\rho/\mu}$

又，入出力点の位置関係は自由表面上の出力点に対し斜め45°下方向に距離l隔って入力点があり，採用した無次元数値パラメータは$\nu=1/3$，$l/a=\sqrt{2}$である．これらの図に見られるように，無限遠方への波動逸散効果に基因して

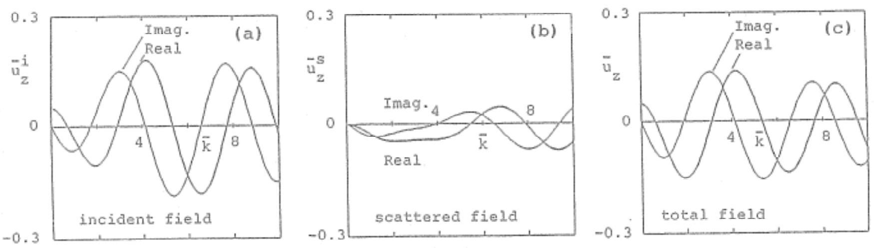

図1　Vertical components of the displacement response due to a vertical loading.
：$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})=(0, 0, 0)$，$(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)=(1, 0, 1)$，$\nu=1/3$

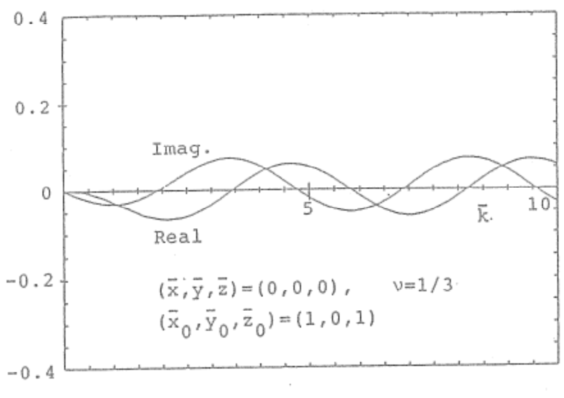

図2－1 Dimensionless component of the displacement response $\bar{u}_z^s$ due to a verticalloading in the scattered field, corresponding to the Cauchy's main value.

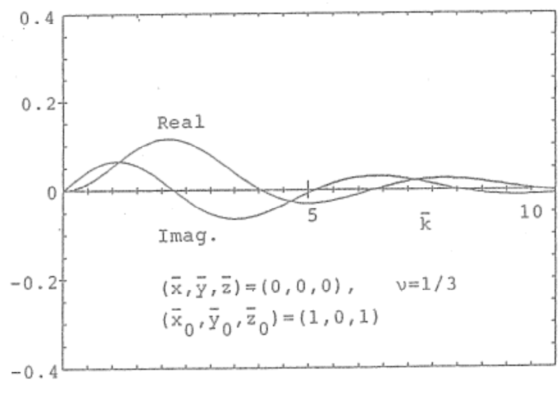

図2－2 Dimensionless component of the displacement response $\bar{u}_z^s$ due to a verticalloading in the scattered field, corresponding to the residue.

周波数域の応答は位相遅れを示し複素表示となる．さらに，これまで説明した各成分毎に分解して図示しているのでそれぞれの貢献度も明らかである．半無限体の動的Green関数に関する解析の一端を紹介しているうちに，早や与えられた紙面数を超過してしまった．何がしか読者諸賢に訴えるものがあれば幸いです．なお末筆ながら数値解析に当たり大阪大学・大学院生花岡和弘君の多大な協力を得たことを記します．

参考文献

1) Morse, P. M. and H. Feshbach Methods of theoretical physics, Part I and II, McGraw-Hill(1953).
2) Baba, K., K. Hanaoka and Y. Inoue A theoretical study of the three - dimensional Green's function in a half - space using finite integral forms, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.40, Univ. Tokyo Press (to appear)(1991)