

## 乱流の数値解析技術



技術解説

三宅 裕\*

## Numerical Simulation of Turbulent Shear flows

Key words : Numerical Simulation, Turbulent Flow, Turbulence Model

## 1. はじめに

流体運動は極めて身近な物理現象であるから古くから幅広い研究の対象にされてきた。このために現在では流体運動はその機構、予測など全てが解決されてしまっていると誤解されることすらあるが、実際は、自然の現象の理解の曖昧さや工学現場での心許なさは流体運動の正確な把握の不足に負う場合が多い。わけても乱流は満足に取り扱い得るまでにはなお遠い道のりを要する厄介な問題である。自然界のほとんどの流れが乱流であるにも拘らずである。

それでも流れの予測技術は最近急速に進歩しつつある。天気予報はしばらく以前に比べれば格段に正確になったし、星を巡るガスの流れの理解も大幅に進んだ。また、航空機用エンジンの単位推力あたりの重量は著しく低下した。いずれも流れの予測の技術が進んだ為であるが、これをもたらしたのは電子計算機による流れ解析、すなわち数値流体力学の発展である。しかし、乱流の理解の不足は流れの予測の向上を妨げている。これに対し、乱流の科学にとって電子計算機が大きなインパクトを与えつつあり、現在では不可欠のツールになっている。本稿では電子計算機を用いた乱流の数値解析技術の概要を述べる。

## 2. Closure

流体の運動は、ニュートン流体を仮定するとよく知られるようにナビエ・ストークス (NS) の式で表すことができる。質量、運動量、エネルギーの釣合を表す5式から成るが、非圧縮流体では普通は機械的エネルギーのみを考えるのでエネルギー式は運動量式と等価になる。乱流では時々刻々の流れが変動するが、これは流れが様々なスケールの渦の集合で構成されるものと理解する事ができる。この様な流れを最小スケールの渦まで、時空間で十分に解像する事も条件によっては不可能ではない。そのようなシミュレーションはDNS (Direct Numerical Simulation) と呼ばれる。しかし、実用上の必要はより巨視的な流れである。そこで流れの速度  $v$ 、圧力  $p$ 、密度  $\rho$ 、温度  $\theta$  などの量  $f$  を、空間でフィルタリング<sup>(1)</sup>を行った量  $\bar{f}$  (大スケール量) と、それからの偏差  $f'$  (小スケール量) を用いて次のように表す。

$$f = \bar{f} + f' \quad (1)$$

$$\bar{f}(\mathbf{r}, t) = \int_{\infty} f(\xi, t) G(\mathbf{r} - \xi) d\xi \quad (2)$$

ただし、 $G(\mathbf{x} - \xi, \Delta)$  はフィルタ関数、 $\Delta$  はフィルタ幅である。 $f$  を空間的に局所的に無限大の場を仮定して  $G$  を一定にとればレイノルズ平均となる。ただし、局所的に無限大の場の実際的な意味は考える乱れの渦の長さスケールに比べて十分大きいという意味である。また有限幅でその全空間での積分値が1となる様なフィルタ関数を仮定すれば格子平均を与え、

\*Yutaka MIYAKE

1938年9月19日生

昭和36年大阪大学工学部機械工学科卒業

現在、大阪大学工学部機械工学科、教授、工学博士、流体工学、

TEL 06-877-5111(内線4211)

LES (Large Eddy Simulation) または VLES (Very Large Eddy Simulation) を行う事になる。どのようなフィルタリングを用いるかは目的とする解析の質によって決まる。なお、圧縮性流体の場合には Favre 平均

$$\hat{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho} \quad (3)$$

を考えると基礎式が簡略化される。

簡単のため、非圧縮流体を考え、連続の式と運動量の式にフィルタリングを行うと次式が得られる。

$$\partial \bar{u}_i / \partial x_i = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (5)$$

ただし、縮約記号を用いた表示をしてあり、 $\nabla^2$  はラプラス演算子で

$$\tau_{ij} = R_{ij} + L_{ij} + C_{ij} \quad (6)$$

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}, \quad C_{ij} = \overline{u'_i \bar{u}_j + u'_j \bar{u}_i}, \quad L_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$$

である。式 (4)(5) を解いて  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{p}$  を求めるためには  $\tau_{ij}$  が与えられなければならない。 $\tau_{ij}$  を、大スケール量のみで表すかまたは独立に与えて未知量の数と方程式の数とを合わせて問題を解ける形に帰着させる事を Closure という。また与えられる  $\tau_{ij}$  を乱流モデルという。

### 3. レイノルズ平均に基づくシミュレーション (RANS)

このとき、式 (1) で大スケール量はアンサンブル平均量となり、 $L_{ij}$ ,  $C_{ij}$  は共に消える。レイノルズ応力  $R_{ij}$  に対する最も簡明な考え方では分子粘性と同じ形式を仮定し、うず動粘性係数  $\nu_T$  を導入し

$$R_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = -\nu_T \bar{S}_{ij}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

と表す。ただし、 $k = \overline{u'_i u'_i} / 2$  は乱れエネルギーである。 $\nu_T$  は次元を考えると代表寸法  $l$  と代表速度  $q$  (または代表時間  $t = l/q$ ) を用いて  $\nu_T = \beta_1 q l$  ( $\beta_1$ : 定数) で表されなければならない。またこれらの代表寸法をもつ乱れの渦の消散率

$\varepsilon$  は  $\varepsilon = \beta_2 (q^3/l)$  で、 $\nu_T = \beta_3 (q^4/\varepsilon)$  ( $\beta_2, \beta_3$ : 定数) となる。

$l$  として混合長  $l_m$  を導入し、 $q$  を  $q = l_m (d\bar{u}/dy)$  とおくとよく知られる Prandtl の理論になる。そして、二次元の壁近傍乱流に対して  $l_m = \kappa y$  ( $\kappa$ : Kármán 定数) とおけば平均流速に対する対数則分布が得られ、平衡流に限れば有効な理論になる。

二つの乱れの代表スケールを定めるために補助方程式を用いる方法が考えられる。NS 式にやや面倒な操作を行うとレイノルズ応力の輸送方程式

$$\begin{aligned} \frac{DR_{ij}}{Dt} &= P_{ij} - T_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij}, \\ \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (8)$$

$$P_{ij} = - \left( R_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + R_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right),$$

$$T_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u'_i u'_j u'_k} + \overline{p' u'_i} \delta_{jk} + \overline{p' u'_j} \delta_{ik} - \nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} \right),$$

$$\phi_{ij} = \overline{p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}, \quad \varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \quad (9)$$

が得られる。式 (8) の右辺は順に  $R_{ij}$  の生成、拡散、再配分、消散を表す。式 (8) の縮約をとると乱れエネルギー  $k$  の輸送方程式

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} &= -R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_k u'_i} + \overline{p' u'_i} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \\ &\quad - \varepsilon \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる。同様に、NS 式に別の操作を施すと  $R_{ij}$  の消散率  $\varepsilon_{ij}$  の輸送方程式が得られる。この式の縮約をとると乱れエネルギーの消散率  $\varepsilon$  の輸送方程式

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = P_\varepsilon - T_\varepsilon - D_\varepsilon \quad (11)$$

が得られる。右辺各項は順にそれぞれ生成項、拡散項、Destruction 項で、その内容は式 (9) に類似の項から成っている。

式 (8) で生成項と消散項が釣り合うとし、定数  $\beta_1$  を  $l$  に含めて  $\varepsilon = \nu_T^3 / l^4$  とおけば

$$\nu_T = l^2 (\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2} \quad (12)$$

となる。ここで長さスケール  $l$  を混合長のように直接与えれば拡張された 0 方程式モデルになる。上式は Smagorinsky モデルと呼ばれるが、後述の LES では  $l$  としてフィルタ幅の代表値をとり、幅広く用いられている。また、0 方程式モデルはその成り立ちからして、乱れの平衡を仮定し、履歴を考慮しないので適用に限界があるが、計算負荷の小ささが現在の電子計算機の能力に見合うため、航空機回りの流れなど、複雑な乱流には大いに利用されている<sup>(2)</sup>。ただし、Baldwin-Lomax のモデル<sup>(3)</sup>では平均流れの歪速度のかわりに渦度が用いられている。

補助方程式には式 (10), (11) 以外にもあり得るがこれら二つを用いるのが現在では最も一般的であり、研究も進んでいる。これらの 2 式は生成項の他は再び closure が必要で、モデルを用いる事になる。導出の詳細は他に譲るとして、原型となるモデル式は、

$$\nu_T = C_\mu k^2 / \varepsilon \quad (13)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \nu \nabla^2 k - \varepsilon \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = & -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) \\ & - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \nu \nabla^2 \varepsilon \end{aligned} \quad (15)$$

である<sup>(4)</sup>。上式で  $C_\mu$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{\varepsilon 1}$ ,  $C_{\varepsilon 2}$  は定数で、いろいろな流れになるべく同じように予測値が良好となるように選ばれる。上式は  $k-\varepsilon$  モデルと呼ばれるが、幅広く利用されている。また、壁近傍では低レイノルズ数効果が現れるのでその補正が必要である。 $k-\varepsilon$  モデルの最も大きな欠点は  $\nu_T$  が等方的である事で、このことは長方形断面直管内乱流における断面内二次流れがシミュレートできないこと等で明確に現れる<sup>(5)</sup>。この欠点は、 $R_{ij}$  が変形速度テンソルのうちの歪速度テンソル  $S_{ij}$  のみならず回転速度テンソル  $\Omega_{ij}$  にも依存する事を考慮し、それらの高次項をとり入れる<sup>(6)(7)</sup> 事によって幾らか改善される<sup>(8)</sup>。しかし、例えば係数  $C_\mu$  はもともと乱れエネルギーの生成量  $P$  と消散量  $\varepsilon$  の比によって変化し全ての流れに普遍的に適合する係数ではない。つまり二方程式モデルを上述

のような修正を加えるとしても、単一のモデル式のままでは複雑な乱流では精度に限界がある。このため、流れ場をいくつかの領域に分けてそれぞれに適した定数を選択して領域毎に解く考え方が<sup>(9)</sup>。

現在のところ RANS として最も近似の少ないモデルは応力方程式モデルであろう。

式 (8) は  $R_{ij}$  の独立な 6 つの成分に対する微分形の輸送方程式を与える。これらを式 (4) (5) と連立させて解く。 $R_{ij}$  の輸送方程式はやはり closure を必要とし、生成項の他はモデルが必要である。実際には  $\varepsilon$  の式を加えて解き、 $\varepsilon_{ij}$  は  $\varepsilon$  を用いて表す。モデルには現在は一様等方乱れから摂動した線形モデル (LRR モデル<sup>(10)</sup>) を基礎として様々な非線形効果を取り入れた多くの提案があるが、乱れの構造を陽に反映したモデルの必要が認識されるようになっている<sup>(11)</sup>。

多数個の偏微分方程式を連立させて解くのは計算負担が大きすぎるので、 $R_{ij}$  に関する式を代数方程式に置き換える考え方が<sup>(12)</sup>。すなわち  $\overline{u'_i u'_j}$  の移流、拡散効果は  $k$  とほぼ同様であるとし次のようにおく。

$$\begin{aligned} \frac{D \overline{u'_i u'_j}}{Dt} - T(\overline{u'_i u'_j}) &= \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \left( \frac{Dk}{Dt} - T(k) \right) \\ &= \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} (P_k - \varepsilon) \end{aligned} \quad (16)$$

これを代数応力方程式モデルという。ただし、 $T(\cdot)$  はそれぞれの拡散項である。いずれの応力方程式モデルも同じ乱流モデルを用いることができる。

以上のような様々な乱流モデルについてその有効性を検討するためにベンチマーク・テストが行われてきた。その代表的な大規模なテストに Stanford 会議<sup>(13)</sup>がある。また現在 P. Bradshaw をリーダーとするモデルの提案、実験的・数値的検討の世界的共同研究が進行中である。これらの吟味の中で最近数年間、とりわけ重要な役割を果たしているのが数値シミュレーションが提供するデータである。測定不可能な場の中の変動圧力や壁近傍での詳細な速度場が与えられるため、モデルの総合的な特性だけでなく、

輸送方程式のそれぞれの項についてのモデルの妥当性も検討できるようになった<sup>(14)(15)</sup>.

#### 4. LES, VLES

RANSは統計平均の流れ場を求めようとするものであるが統計平均を時間平均に置き換えて考える。したがって、得られる流れは時間的に遅い変化をする流れの空間分布である。しかし、乱流モデルの開発、乱れ機構の解明などのほか、実用的にも瞬時流れの把握が必要となる場合が多い。このとき、よく知られるように必要とされる格子数はDNSでは巨視的レイノルズ数の(9/4)乗に比例して大きくなるので一般的な流れでは計算機の能力を越える。そこで、流れ場の構造を決め、必要な統計量を決める大きなスケールの渦のみをシミュレートし、格子スケール以下の小スケール渦の寄与はモデルによる方法が実用的となる。そのために、空間的に有限幅のフィルタを用いてフィルタリングを行う。非圧縮流れでは基礎式は(4)~(6)で与えられ、フィルタリングによって生じる3種の見かけの応力(SGS応力)に対するモデル式が必要となる。

式(8)はSGS応力 $\tau_{ij}$ に対しても成り立つ。レナード項 $L_{ij}$ 、クロス項 $C_{ij}$ を無視し、生成と消散が釣り合うものとするると先述のようにSmagorinskyモデルが得られる。式(12)でフィルタ幅の代表値 $\Delta$ を用いて $l=C_s\Delta$ と表す。ここに、 $C_s$ はモデルに含まれる唯一の定数であるが、格子幅が十分に小さく、SGS乱れが慣性小領域にあるならばその値は流れによらず普遍的な値になる。しかし、これまでに行われたシミュレーションでは $C_s=0.1\sim 0.25$ で、壁乱流では自由乱流よりも小さくする必要があらることが知られている<sup>(16)</sup>。また、 $\Delta$ はフィルタ関数によって異なり、Top-Hatフィルタでは格子幅、ガウスフィルタでは格子幅の2倍が

適当とされる。Smagorinskyモデル<sup>(17)</sup>は一方向的に消散的で小スケール渦から大スケール渦へのエネルギーの逆流を表現できない等いくつかの欠陥があるが小スケール渦の基本的な挙動をよく近似しており、最も広く利用されている。このほかにBardinaモデルの名で呼ばれるScale Similarity Model<sup>(18)</sup>があるが、これはクロス項に付加して取り入れるべきであることが指摘されている<sup>(19)</sup>。さらに最近 $C_s$ を場所ごとに計算の過程で変更していくDynamic SGS-Model<sup>(20)</sup>が提案されている。

複雑な形状の大規模な流れ場に対して十分小さな格子を用いることは少なくとも近い将来には不可能である。このとき、Smagorinskyモデルの前提は満足されず、RANSにおける輸送方程式の利用と同様、式(8)などを解いて $\nu_T$ をステップごとに決定する方法が必要になる。この方法はVLES(Very Large Eddy Simulation)と呼ばれるが、長さスケールを格子幅に固定して一方方程式モデルにする場合は効果が少ない<sup>(21)(22)</sup>。しかし、応力代数方程式モデルを用いた多方程式VLESの気象問題に対するシミュレーション<sup>(23)</sup>では有用さが示されており、発展が期待される。

LESは短い時間ステップで陽的に時間方向に解き進めていくので計算量は極めて大きい。しかし、大規模複雑場の流れでは最も信頼のおける結果を与える。また、流れの機構を知るためには有用で、非円形断面の直管の乱流における断面内二次流れの機構解明などの例がある<sup>(24)</sup>。さらに、最近では、騒音シミュレーションの流れ場計算<sup>(25)</sup>への応用も試みられており、将来の発展が期待される。

#### 5. DNS

乱流を最も忠実にシミュレートするのはDNSである。このために、現在はほとんどス

表1 最近のDNS(清記流)<sup>(26)</sup>

	Reynolds Number			Spectral Modes	Comp. Vol. $L_x \times L_y \times L_z$	Spatial Resolution			Time Steps $\Delta t^+ \times N$
	$2U_m\delta/\nu$	$2U_b\delta/\nu$	$u_r\delta/\nu$			$\Delta x^+$	$\Delta y^+$	$\Delta z^+$	
Kuroda et al. (1989)	2980	3480	100	64 × 65 × 64	$4\pi\delta \times 2\delta \times 2\pi\delta$	19.6	0.12 ~ 4.9	9.8	0.08 × 30000
Kuroda (1990)	4560	5360	150	128 × 97 × 128	$5\pi\delta \times 2\delta \times 2\pi\delta$	18.4	0.08 ~ 4.9	7.4	0.12 × 38000
Kim et al. (1987)	5600	6600	180	192 × 129 × 160	$4\pi\delta \times 2\delta \times 2\pi\delta$	11.8	0.05 ~ 4.4	7.1	0.08 × 22500
Kim (1990)	13750	15760	395	256 × 193 × 192	$2\pi\delta \times 2\delta \times \pi\delta$	9.7	0.05 ~ 6.5	6.5	—

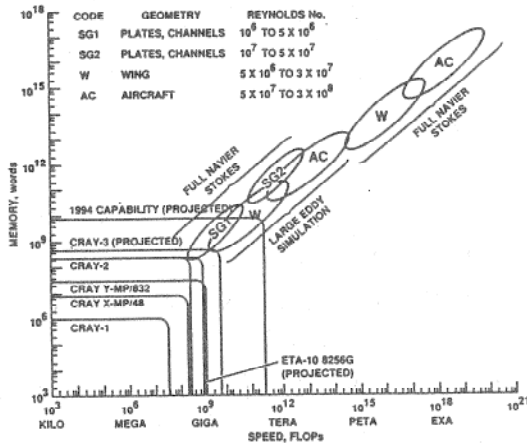


図1(a) 乱流解析のため所要計算機速度と記憶容量 (CPO 200時間)<sup>(27)</sup>  
FLOPS: 1秒間あたり浮効小数点演算回数

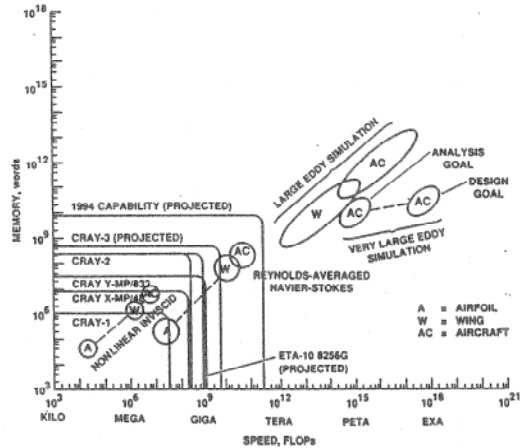


図1(b) 流体機能設計における乱流解析のための所要計算機速度と記憶容量 (CPO 15分)<sup>(27)</sup>

ペクトル法を用いている。微分演算を代数演算に帰することが出来るため高精度が得られるからであるが、複雑な形状の流路を取り扱うことは出来ない。また、DNSではレイノルズ数とともに急速に増加する乱れエネルギーを解像された渦の粘性消散で釣り合わさなければならないため、格子数の不足は直ちに計算の発散となる。したがって、DNSは低レイノルズ数に限定されることになるが、それでも最近の大規模な計算は表1<sup>(26)</sup>のとおりで、実用的なレイノルズ数に近づいている。最近ではグラフィクス技術の発達により乱流の瞬時構造を様々な量を用いて三次元的に表示する事ができるようになったため、DNSのデータは乱流の機構の探求、モデルの検証に極めて有効で大規模な計算が行われている。また、日本でもDNSに基づくデータベースの構築の作業が進められている。

将来の電子計算機の発達はなお急速に進むものと考えられるが、数値シミュレーションの可能性に関する予測の一例を図1<sup>(27)</sup>に示す。複雑な場の流れに対するDNSは可能性が少ないこと、VLES, LESが実用上は期待されることがわかる。

## 6. おわりに

乱流解析技術は数値解析、グラフィクス、乱流のモデリングなど異分野の技術の共同作業で支えられている。全てを一人で賅うことは困難

で、互いの領域を理解し合えるような人々のチームが必要である。たとえば、電子計算機の高速度化には並列化を進めることになると考えられるが、流れ解析に都合の良い並列化が可能ならば進歩はより早くなるであろう。乱流解析の実用化は現在の最も重要な研究・開発の目標の一つとしてEC、米国を中心に大きな努力が払われているが、わが国でも、ふさわしいチームの協力が期待される。

## 文 献

- 1) Leonard, A., Advances Geophys., 18A (1974), P. 237.
- 2) 田村敦宏, 第4回数値流体力学シンポジウム講演論文集(1990), p. 1
- 3) Baldwin, B. S., Lomax, H., AIAA-Paper, No. 78-257 (1978)
- 4) Launder, B. E., Spalding, D. B., Comp. Methods Appl. Mech. Eng., 3. (1974), p. 269
- 5) Demuren, A. O., & Rodi, W., J. Fluid Mech. 140 (1984), p. 189
- 6) Yoshizawa, A., Phys. Fluids 27 (1984) p. 1377
- 7) 西沢勝一, 生産研究 43-1 (1991), p. 20
- 8) Ferziger, J. et al., Proc. Zoran Zarić Memorial Intl. Seminar on Near Wall Turb., May 1988, Dubrovnik, p. 1

- 9) Speziale, C. G., Ann. Rev. Fluid Mech., **23** (1991), p. 107
- 10) Launder, B. E., Reece, G. J., Rodi, W., J. Fluid Mech. **68-3** (1975), p. 537
- 11) Cantwell, B., Lecture Notes in Physics 357, ed. Lumley, J. (1989), p. 97
- 12) Rodi, W., ZAMM, **56** T 219 (1976)
- 13) Kline, S. J., Cantwell, B. J., Lilly, G. M., "The 1980-81 AFOSR-HTTM -Stanford Conference on Complex Turbulent Flows : Comparison of Computation and Experiments", (1981).
- 14) Mansour, N. N., Moin, P., Kim, J., J. Fluid Mech. **194** (1988), p. 15
- 15) 三宅裕, 梶島岳夫, 日本機械学会論文集B, **55-512** (1989), p. 999
- 16) 三宅裕, 梶島岳夫, 日本機械学会論文集B, **53-491** (1987), p. 1869
- 17) Smagorinsky, J., Monthly Weather Rev., **91** (1963), p. 99
- 18) Ferziger, J. H., Therm. Sci. Div. Rep. Dept. Mech. Eng. Stanford univ. TF-16 (1981)
- 19) Horiuti, K., Phys. Fluids, **A1-2** (1989), p. 426
- 20) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., Cabot, W. H., Phys. Fluids, **A3-7** (1991), p. 1760
- 21) 三宅裕, 梶島岳夫, 機械の研究, **39-11** (1987), p. 1189
- 22) Horiuti, K., J. Phys. Soc. Japan, **54-8** (1985), p. 2855
- 23) Schmidt, H., Schumann, U., J. Fluid Mech. **200** (1989), p. 511
- 24) 梶島岳夫, 三宅裕, 日本機械学会論文集B, **57-540** (1991), p. 2530
- 25) 石井克也, 日本機械学会関西支部第177回講習会教材 (1990), p. 1
- 26) 笠木伸英, 日本機械学会第69期全国大会講演会資料集D (1991), p. 80
- 27) Peterson, V. L., et al. Proc. IEEE, **77-7** (1989), p. 1038

