ウェーブレット理論によるシステム解析

研究ノート

前田　　肇*

System Analysis by Wavelet Theory

Key Words: Wavelet Theory, Gabor function, model reduction, system identification.

1．はじめに

ウェーブレット変換は地震波の解析に導入された非定常波形解析用の信号変換理論である．従来のフーリエ変換が，1次元信号に対して1変数ωを対応させるのに対して，ウェーブレット変換は1変数関数を2変数の関数に変換する．そして，高い周波数成分に対しては時間分解能が高く，低い周波数成分に対しては周波数分解能の高くなるという特徴をもつ．これらは，従来のフーリエ変換法にはない特徴である．ここに従来にない新しい理論の展開と新技術のシーズがあるものと考え，この分野の研究に着手した．著者の本来の研究の基盤がシステム制御理論分野であるので，とくに制御分野への応用に焦点を当てウェーブレット理論を研究している．以下，現在までに得られた成果の一部を簡単に紹介したい．

2．ウェーブレット変換とは

関数$f(t)$のウェーブレット変換は

$$f(a,b)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\psi_{a,b}(t)dt$$

$$\psi_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

で定義される．ここで，$a>0$はスケール変換をあらわし，bはシフト変換を示す．$\psi(t)$に若干の仮定を設けるだけで，ウェーブレット逆変換が定義されることや，フーリエ変換の場合のパーセバル等式に対応した関係式が成立することが知られている．

とくに，$\psi(t)$が時間原点近傍に局在化した関数に選ぶと，ウェーブレット変換$f(a,b)$は時間$t=b$の近傍における$f(t)$の性質を抽出したものと考えられる．また，$\psi(t)$のフーリエ変換がある周波数の近傍に局在化していると，a^{-1}は周波数と同一視でき，$f(a,b)$はa^{-1}に対応した周波数近傍の$f(t)$の情報を選択的に抽出しているとも考えることができる．したがって，$\psi(t)$として，時間的にも周波数的にも局在化した関数を採用すると，ウェーブレット変換によって特定の時間・周波数領域の情報を任意に取り出すことが可能になる．また，逆変換公式を用いれば，特定の時間・周波数領域の情報から元信号を復元できることになる．このような時間・周波数ともに局在した関数$\psi(t)$として，各種の関数が提案されているが，本研究ではGabor関数を使用している．

なお，ウェーブレット変換については，いつくかの異なった立場からその意味の解釈がなされている．聴覚機能が周波数選択的ないくつかの要素から成り立っているという生理学的な事実を数理的に表現したものという解釈や，レーダ反射波からの移動体の推定を表すambiguity functionとしての解釈，さらには多重解像度解析としての解釈法など異分野からそれぞれの独自の説明がつけられている．

*Hajime MAEDA
1943年4月5日生
昭和41年大阪大学工学部通信工学科卒業，昭和46年同博士課程修了
現在，大阪大学工学部電子工学科，助教授，工学博士，システム制御理論
TEL 06－877－5111

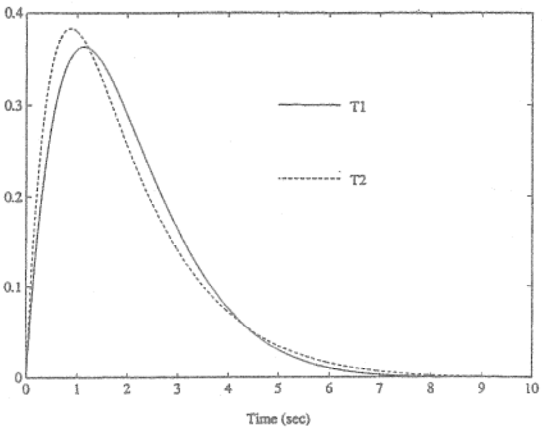

図1　T_1, T_2の時間特性

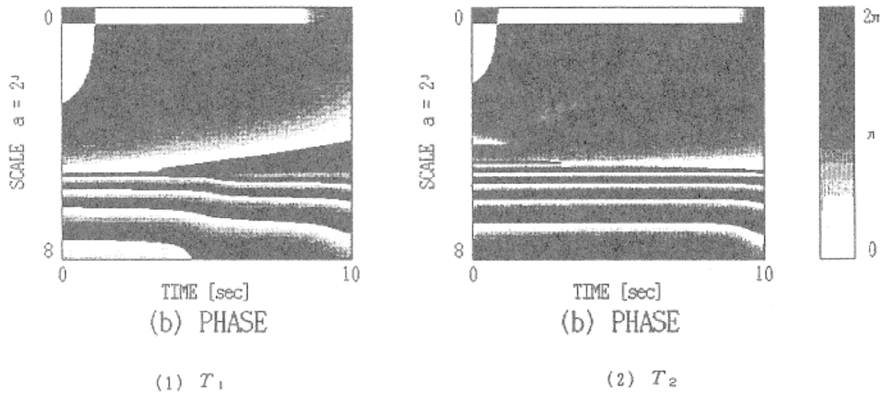

図2　T_1, T_2のフェーブレット解析［ガボール関数］

3．システム同定への応用

システム解析や制御にとって，システムの応答曲線はシステムの内部を知る上で基本的に重要なものである．応答の違いがシステムの違いを表すものとするならば，応答曲線の違いを識別することは重要な仕事となる．図1に示すとおりの応答特性をもつ2次の伝達関数T_1とT_2を考えよう．時間応答は似通っている．これをウェーブレット変換したのが図2である．この図より，tが大きいところではウェーブレット変換に顕著な差が現れており，ウェーブレット変換がかなりの識別能力をもつことがうかがえる．この性質は，システム低次元化問題やシステム同定問題に有効に利用できるものと期待できる．

そこで，ウェーブレット変換を用いた低次元化について考察し，数値実験でその効果を調べてみた．近似誤差のウェーブレット変換に重み関数$W_3(a,b) > 0$を掛けたものの積分を評価関数に選び，これを最小化することによって近似モデルを得るわけである．テストに用いた伝達関数はT_1でその次数は3である．これを2次の伝達関数で近似するわけである．得られた結果を図3に示す．重み関数が$W_3(a,b) = 1$と$W_3(a,b) = a^2$とした場合の結果には差はほとんど認められない．重み関数$W_3(a,b) = \pi/2 - \tan^{-1}(b\text{-}2)$は時間区間$0 \leqq t \leqq 2$の部分を強調することを意図してものである．これを用いた場合の結果では，$t > 3$では真値からのずれは大きくなっているものの，$0 \leqq t \leqq 2$の区間ではより真の解に近い近似解を与えており，所期の目的が達成されている．

つぎにシステム同定問題にも適用した．すなわち，ウェーブレット変換を用いて，雑音に汚されたデータから，背後にある線形システムをパラメトリックな手法で同定するわけである．

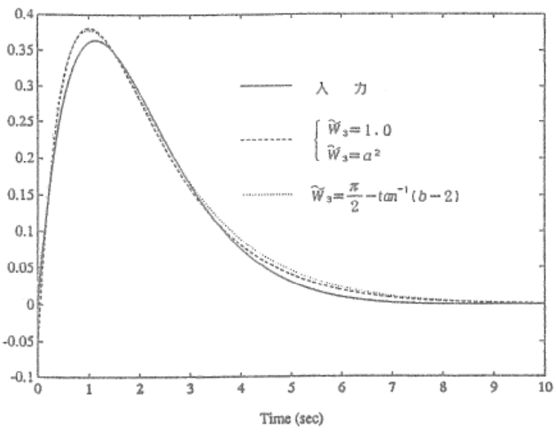

図3　近　似　結　果

急激な変動を含む応答曲線の場合，実際に得られる応答データからシステムを同定するのは，ノイズの影響が無視できず正確な同定は困難である．しかし，ウェーブレット変換を用いれば，信号自体の高周波成分とノイズの高周波成分とに時間的に区別することが可能となり，困難さが克服できるのではないかと思われる．そのために，重み関数 $W(a,b)$ を適当に選んで，過渡的で急激な変化を呈する初期過程では，高い周波数まで考慮にいれ，おとなしくなったところでは低い周波数までを考慮するようにすると，ノイズの影響を低減化でき，うまくシステム同定ができることが明らかになった．

4．おわりに

ウェーブレット変換の工学分野への応用研究は途についたところで，画期的に成功した例はいまだ報告されていない．しかし，応用研究は各種の分野で活発に行われており，たとえば，画像のデータ圧縮，故障診断への応用などやカオス現象や乱流の解析などへの応用研究も活発に成されている．今後一層基礎的な理解を深めるための研究と，より広範な分野にわたる応用研究がなされていくものと考えられる．