

2次元フラストレート・イジング系の 外場応答とトポロジカル秩序



研究ノート

笠井 康弘*

External Field Response and Topological Order
in 2D Frustrated Ising System

Key Words : Spin, Order, Frustration, Percolation, Topology

1. はじめに

相転移現象は統計力学の重要なテーマである。低温において構成粒子が相互作用に従う秩序（広い意味の凍結）をもつ場合、温度が上昇したある点（転移温度）で秩序が壊れる。その際、熱力学的諸量に数学的特異性の現れることが、相転移に伴う臨界現象である。いろいろなモデルがつくられ、統計力学の計算が行われたが、厳密な解答は極く少数の例を除いて得られないのが普通である。表題の2次元イジング・スピニ系は自由エネルギーの表式が求まった珍しい磁性体のモデルであり、特に反強磁性三角格子系は相転移を持たないことが、よく知られている。また磁場に対しても全く臨界的な振る舞いを示さない。一方、近年高温超伝導物質の発見をきっかけとして、フラストレート相互作用をもつ2次元量子スピニ系に注目が集まっている。何か超伝導に関係する新しい秩序を見いだそうということである。上述の2次元イジング・スピニ系は、量子スピニの重要な成分を欠いているものの、一応量子スピニ系のカタゴリーに属する体系である。それならば、このイジング系にも何か新しい秩序の痕跡がないか探してみる。

2. フラストレート・イジング・スピニ系

(1) イジング・モデル

磁性体のモデルであるイジング・スピニ系の由来は、結晶格子上において隣接する電子スピニが交換相互作用している量子スピニ系すなわちハイゼンベルグ・モデルである。結晶上の各スピニ（仮に i 番目とする）は2つの状態しか取り得ないので、それを

$$S_i = 1 \text{ および } -1$$

と区別し、各隣接スピニ S_i, S_j の相互作用を

$$-J S_i S_j \quad (J \text{ は定数})$$

と算術積に置いたものがイジング・モデルである。別のいい方をすればスピニ演算子が座標の1成分しかないハイゼンベルグ・モデルと同等である。このような単純化のもたらす影響を論ずることは相当に難しい。結論的にいえば、臨界現象は体系全体の相関が寄与する大局的な性質なので、モデルの細かい相違の影響は意外に小さいことが多い。

(2) フラストレート相互作用

要するにイジング・モデルのスピニは2つの向き ± 1 しかもたない原子磁石である。相互作用の定数 J の符号によって隣接スピニ対のエネルギー的に安定な状態が決まる。

$J > 0$ (強磁性的) ; 共に $+1$ か共に -1 ,
すなわち平行になる。

$J < 0$ (反強磁性的) ; それは互いに逆向き,
すなわち反平行となる。

例えば、すべての隣接相互作用が強磁性的であるならば、すべてのスピニが平行になれば安



*Yasuhiro KASAI

1941年7月19日生

1970年大阪大学大学院・工学研究科・応用物理学専攻博士課程修了
現在、大阪大学工学部数理工学教室応用力学第2講座、助教授、工学博士、物性基礎論
TEL 06-877-5111 (内線 4680)

定である。体系が2次元および3次元格子の場合、有限の転移温度をもつ強磁性体となる。隣接相互作用が反強磁性的な場合は少し複雑になる。例えばスピンを四角形の頂点に置いたとき、各辺のスピン対を反平行にする配向は可能である。ところが三角形のとき、すべてのスピン対を反平行にすることは不可能である。2つの対を反平行にすると残りの対は必然的に平行となる。かつ反平行対の取り方に不定性がある。このように、スピンをどのように配向させても相互作用に不利なものが生じるとき、フラストレート状態であるという¹⁾。例えば、すべての隣接相互作用が反強磁性である反強磁性三角格子では、すべての面要素がフラストレート状態である。これを特に完全フラストレート状態という。強磁性的および反強磁性的相互作用が混在する体系では複雑なフラストレート状態が現れる。一般的にいって、フラストレート状態が多く含まれる体系では、スピン配向は無定形となる。その無定形配向が凍結されることがある。それはスピン・グラスと呼ばれる興味深い状態であるが、ここでは扱わない。

3. 外 場 応 答

2次元イジング系である反強磁性三角格子(完全フラストレート)の自由エネルギーは早くから厳密な表式が求まり、有限温度に相転移のないことが示されていた²⁾。さらにスピン対相関関数も厳密に計算され、少なくとも絶対零度では臨界的に振る舞うことが知られていた³⁾。通常、スピン対相関関数に臨界性があれば、磁場応答にも臨界性が現れる。ここで、磁場応答の臨界性とは、弱い引加磁場をだんだん強くしていくとき、磁化が磁場の強さの増加より大きな割合で共鳴的に増大することである。このフラストレート系に対して、近年まで臨界応答の報告はなかった。通常の臨界現象では低温相が存在し、臨界応答は低温相を強化するような外場(共鳴外場)に対して最も顕著になることが知られている。低温相をもたないこの系では、共鳴外場は原理的に存在しないよう見える。

ところが、無定形なスピン配向を強化する共鳴外場が見つかった。それは、格子自身を外場

の代用とする方法である。まず、同じ反強磁性三角格子を2まい重ね、対応するスピン間に入れた弱い強磁性相互作用を外場と見なす。もし各格子内のスピン配向に特定の傾向があれば、両格子は外場を通して共鳴しあう。この方法はスピン・グラス研究の副産物として得られリアル・レプリカ法と呼ばれる⁴⁾。シミュレーションの結果、その共鳴外場に対して臨界応答の現れることが確かめられた⁵⁾。以上より、このフラストレート格子は強い相関系であり現実の観測量にそれが反映されることを示している。ただし、その強い臨界性は、本質的に絶対零度近傍の性質であり、有限温度の相転移ではない。

4. トポロジカル秩序

フラストレート系の有限温度における転移を問題にするためには、もっと精密にスピン相関を表すことが必要である。実際、スピン相関を直接視覚化する数学的変換は早くから知られていた⁶⁾。しかるに、その表現には、存在するはずのない有限の転移温度が現れるので、なにか非物理的モデルに対応する表現と理解されてきた。浸透系表現と我々が名付けたものそれである。

相互作用によって相関をもつスピン対を占有ボンド、フラストレートまたは熱によって相関が破れたスピン対を空ボンドで表すと結晶格子のボンドが占有ボンドかまたは空ボンドのいずれかであるランダム・パターンが得られる。低温となるに伴って占有ボンドが連なった相関クラスターがだんだんと大きくなり、ついに巨視的に大きなクラスターが現れる温度になる。浸透系表現自体は強磁性イジング系に対しても存在し、巨視的相関クラスターは全スピンが平行に凍結した磁化に対応する。一方フラストレート系の場合、スピンの不定性を反映して巨視的な数のランダム・パターンが生まれる。ひとつのパターン中の巨視的相関クラスターは各格子点のスピンを固定するが、ランダム・パターン全体としてはスピンを固定せず、共通の配向ルールに従って拘束する。従って、多数のランダム・パターン全体は、特定の幾何学的パターンをもたない新しい秩序と考えられる。その秩序を、

隣接スピンの相関が次々と連なった状態(各瞬間の空間コヒーレンス)という意味で、トポロジカル秩序と名付ける。さらに我々は、問題はフラストレート・イジング系をシミュレートした結果、トポロジカル秩序(巨視的相関クラスター)は、同じ格子の強磁性転移温度よりやや低い温度で臨界的に消失することを確認した⁷⁾。

そこで、問題は逆転する。自由エネルギーに転移温度の特異性がないのは何故かということである。我々は次のように考えている。まず浸透系表現の自由エネルギーはクラスター数のみの関数であることがわかっている。巨視的クラスターが消失することは、1つのクラスターが無数の有限クラスターに分解することを意味する。すなわち、クラスター数が爆発的に増大する。一方巨視的クラスターを分解するには占有ボンドを消失させる必要がある。空ボンドが豊富なフラストレート系では、まわりに占有ボンドを放出して空ボンドを取り込めば良い。その放出ボンドが、まわりに既に存在する無数の有限クラスターを再結合させクラスター数の急激な増大を抑え込むと考えられる。

5. おわりに

2次元完全フラストレート・イジング系は、自由エネルギーを見る限り全く相転移を示さない。古典的な相転移論では自由エネルギーの特異性が基礎になっているので、この体系は相転移研究の対象外ということになる。簡単に確かめられる臨界応答が永年見いだされなかった理由は、その辺にあると思われる。また教育的なのはトポロジカル秩序である。スピンが凍結し

ない秩序とは奇妙なものである。しかし相関クラスターに関する限り、通常の秩序にくらべ遜色はない。一方、超難度問題の量子スピン系はスピン状態を変動させる成分を含みスピン凍結型の秩序をもたないことが知られている。しかるに、トポロジカル秩序は、多数のスピン状態に共通なコヒーレント性なので、量子スピン系においても基本的な概念は生き残ると考えている。

参考文献

- 1) G. Toulouse, Commun. Phys., 2, 115 (1997).
- 2) G. H. Wannier, Phys. Rev., 79, 357 (1950).
- 3) J. Stephenson, J. Math. Phys., 5, 1009 (1964) ; J. Villain, J. of Phys., C10, 1717 (1977) ; T. Horiguchi, K. Tanaka and T. Morita, J. Phys. Soc. Jpn, 61, 64 (1992).
- 4) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys., 58, 1151 (1977) ; M. Suzuki and S. Miyashita, J. Phys. Soc., 52, Suppl. 95 (1983).
- 5) Y. Kasai and K. Ohnaka, Prog. Theor. Phys., 88, 219 (1992).
- 6) Y. Kasai and A. Okiji, Prog. Theor. Phys., 79, 1080 (1988).
- 7) Y. Kasai and K. Ohnaka, Prog. Theor. Phys., 82, 1057 (1989) ; ibid., J. Magn. Magn. Mater., 90&91, 192 (1990).

