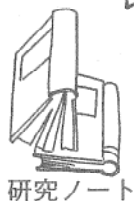


# レーザー核融合プラズマに関連した 複雑系のシミュレーション



研究ノート

西原 功 修\*

## Simulations of Complex Systems Related to Laser Fusion Plasmas

**Key Words** : Laser Fusion, Rayleigh-Taylor Instability, Fractal, Strongly Coupled Plasma, Chaos, Lyapunov Exponent

### 1. レーザー核融合

レーザー核融合では、核融合燃料を封入したカプセル(ターゲット)に高強度レーザー光を照射し、核融合燃焼が生じる温度、密度半径積にまで燃料を圧縮加熱する。当センターでは、例えば、波長 $0.53\ \mu\text{m}$ 、 $10\text{kJ}$ 、1ナノ秒のレーザー光を、50気圧程度の重水素ガスを封入した直径 $500\ \mu\text{m}$ 、厚さ $5\ \mu\text{m}$ のプラスチックシェルに照射する実験が行われている。核融合燃焼の点火には、5千万度の温度、固体密度の1千倍の密度、 $0.3\text{g}/\text{cm}^2$ の密度半径積が必要であるが、それぞれ、1億度の温度、600倍の密度、 $0.1\text{g}/\text{cm}^2$ の密度半径積が達成されている。

レーザー爆縮は空間的にも時間的にも極めて短いスケールで起こる現象であり、また、レーザー光の吸収、ターゲットの電離、電子や軟X線軸射によるエネルギー輸送、流体運動などの種々の過程が同時に、相互に関連して起こる現象である。したがって爆縮物理の解明、実験結果の予測、ターゲットデザインなどに、計算機シミュレーションは重要な役割を担っている。

本稿では、レーザー核融合そのものではなく

レーザー核融合プラズマに関連して著者が行っている最近のシミュレーション研究から2つの話題を提供したい。1つはレーザー爆縮の安定性、一様性に関連しており、もう1つはレーザー爆縮で達成される超高密度プラズマ中の輸送に関係している。

### 2. レーリー・テラー不安定面はフラクタルか?

重力加速度( $g$ )が質量の重い流体から軽い流体にかかっている時、圧力勾配と重力がつりあっている平衡状態( $\nabla p = \rho g$ )でも、その境界面にゆらぎ( $\xi_0$ )が生じると、その変位は指数関数

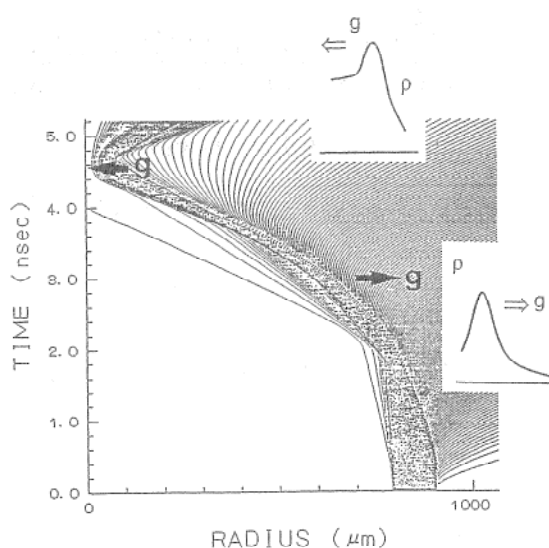


図1 レーザー爆縮の流線図。加速時には表面が、また最大圧縮時には燃料とプッシュャの接触面が不安定になる。

\*Katsunobu NISHIHARA  
1945年2月25日生  
1969年大阪大学大学院基礎工学研究科 物理系専攻電気分野 修士課程修了  
現在、大阪大学レーザー核融合研究センター教授、工学博士、プラズマ物理、核融合、計算物理  
TEL 06-879-8725



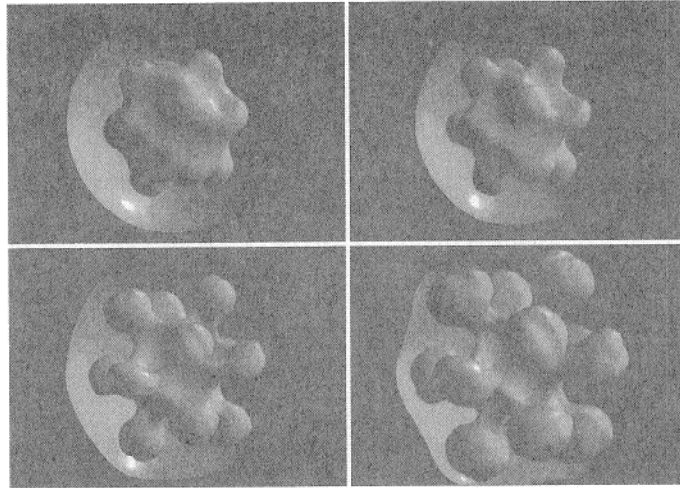


図2 球圧縮のレーリー・テラー不安定面の3次元シミュレーション。バブル(凸)とスパイク(凹)構造。

的( $\xi = \xi_0 e^{\gamma t}$ )に成長する。これがレーリー・テラー不安定性(R-T不安定性)である。レーザー爆縮では、図1に示すように、ターゲットの加速時にはその表面で、また最終圧縮時には燃料とカプセルとの境界面で、それぞれR-T不安定性に対して不安定となる。初期の小さな不均一が成長し燃料の均一圧縮を妨げる。

通常、R-T不安定性の成長率は、ゆらぎの波長の平方根に比例し、短波長ほど成長率が大い。しかし、ターゲット表面ではレーザーアブレーションによる表面でののはがれにより短波長のゆらぎは安定化される( $\gamma = \alpha\sqrt{kg} - \beta kVa$ ,  $Va$ ははがれ(噴出)速度)<sup>1)</sup>。したがって最大の成長率を与える波長が存在する。

図2は、圧縮の最終段階で高温の軽い燃料の圧力が上昇し、カプセルが減速を受け、その境界面で生じるR-T不安定性の非線形発展の様子を示したものである<sup>2)</sup>。図は3次元の圧縮性流体のシミュレーション結果で境界面(密度の等値面)の3次元表示である。単一のモードのみが不安定になった場合には図のようにバブル(凸の部分)とスパイク(凹)の構造がはっきりと現れる。しかしながら現実には複数のモードが存在し、また、それらのモード( $k_1, k_2$ )のモード結合( $k = k_1 \pm k_2$ )により、次々といろいろなモードが励起されることになる。複数のモードが存在する場合の非線形発展の様子を図3に示す。色は質量密度の大きさに対応しており上が重い流体で重力加速度は下向きである。複数のモードが存在する場合には初期のゆらぎのスペ

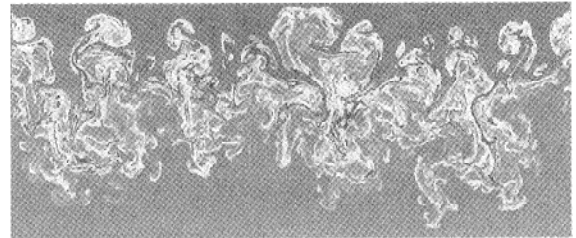


図3 レーリー・テラー不安定面の2次元シミュレーション。境界線(密度等値線)の複雑な構造。

クトルにかかわらず図のような複雑な構造が表れる。

フラクタルは自己相似性を有する複雑な図形である。すなわちどのようなスケールで観察しても似たような形状を示し、特徴的な波長がなく、非常に広いスペクトルを持っている。振動周期を持たない表面波の不安定性であるR-T不安定性では、先に述べたように全てのモードは非線形性によりモード結合を行い、次々と新しいモードが生じ、非線形発展段階では特徴的な波長の存在しない広いスペクトルを持つことになる。しかしながら、ソリトンの発見にも関係したFermi-Posta-Ulamのパラドックスの例<sup>3)</sup>に見るようにモード結合だけではフラクタルが形成されるとは考えにくい。散逸とか外部からのエネルギー注入が存在するような開いた系であることが必要と考えられる。R-T不安定性では重力という外部からのエネルギー注入が存在する。これらの考察からレーリー・テラー不安定面は非線形発展段階ではフラクタルになることが推論できる。図3に示した不安定

境界線の複雑な構造がフラクタルであることを検証するために、境界線（等密度線）のフラクタル次元を計測した。

フラクタル次元も通常の空間次元と同じように考えることができる。例えば線分を2分割すると同じ線分が2(=2<sup>1</sup>)個でき、面は4(=2<sup>2</sup>)個に分割され、立方体は8(=2<sup>3</sup>)分割される。フラクタル曲線としてよく知られているコッホ曲線は3分割して同じ線分が4個でき次元はlog<sub>3</sub>4=1.26…と考える(図4参照)。すなわち、

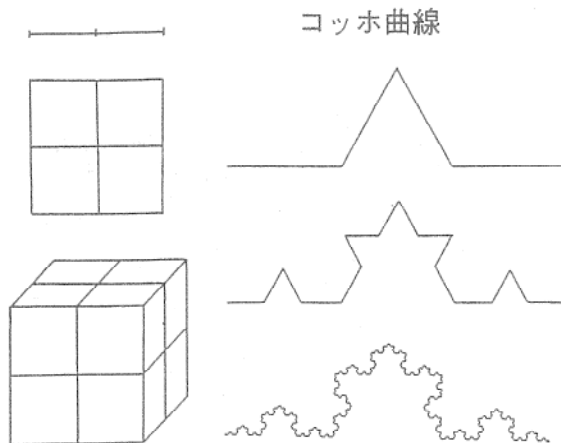


図4 線(1次元), 平面(2次元), 立体(3次元)とコッホ曲線

形測するスケールを1/nにした時に同じ形状のものがN個できる場合に次元は $D = \log_n N$ と言う。例えば曲線の次元が1より大きい場合にはフラクタルであり、観測するスケールを小さくしていくと、長さはどんどん長くなることになる。図3に示した境界線の次元はbox counting法で容易に計測することができる。シミュレーションでは等間隔の2次元空間格子を用いているが、等密度線のある点から法線方向の距離 $\epsilon$ 内に含まれる空間格子の数の平均を $N(\epsilon)$ とすると、次元は $D = 2 - \log_2 N(\epsilon)$ となる。

図5は、空間格子の大きさで規格化した距離( $\epsilon/\Delta x$ )とその距離内に含まれる格子点の数( $N(\epsilon)$ )との関係を示す。システムサイズの波長の成長率( $\gamma_1$ )で規格化した測定時刻を図中に示す。図3の図形は時刻 $\gamma_1 t = 5$ に対応している。単一モードの場合には振幅が波長程度になると非線形成長へと移行するが、多くのモード

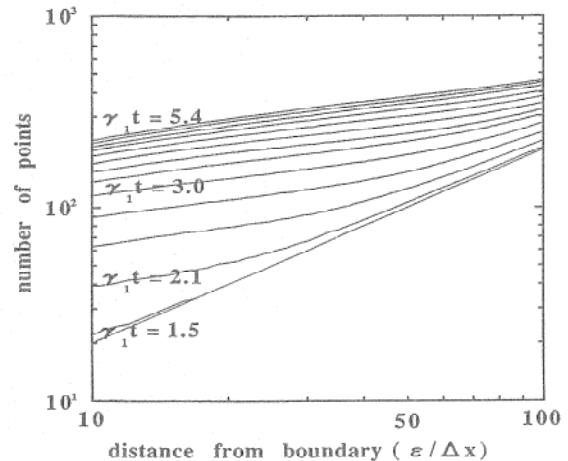


図5 図3の密度等値線の法線方向距離、 $\epsilon/\Delta x$ に含まれる格子点の数 $N(\epsilon/\Delta x)$ の平均値。図中の $\gamma_1 t$ はシステムサイズの波長の線形成長率で規格化した時間。

が存在する場合にはその判定は必ずしも容易でない。シミュレーションでは、だいたい $\gamma_1 t = 2$ 程度で非線形成長へと移行する。線形成長過程では( $\gamma_1 t < 1.5$ の時刻)等密度線からの距離とそこに含まれる格子の数は、図に示すように規格化された距離が10の場合には上下合わせて20となり、距離が100の場合には200となり、格子の数は距離に比例している。したがって次元は1である。しかしながら、非線形成長領域になると、小さいスケールからその勾配は1より小さくなる。時刻 $\gamma_1 t = 3$ では格子間隔の10~100倍の全スケールで勾配は0.33程度になり、フラクタル次元は1.67である。フラクタル次元は時間的に一定で、また初期スペクトルの違いによる次元の変化は±0.1程度にしかならない。

フラクタル構造の生成の機構は明らかではないが、傾圧性( $\nabla \rho \times \nabla p$ )によるうずの生成と関係していることはフラクタル構造の現れる時刻がうず度の急激な成長時間と一致することから明らかである。うずの成長がいろいろなスケールでの境界線の巻き込みを生じさせフラクタルが現れると考えられる。また、このことにより境界線はどんどん長くなる。フラクタルが等方的であるならば、境界線の次元が1.67であることから、境界面の次元は2.67になることが予測される。この研究は、不安定性の非線形発展で生じる乱流混合領域の幅の時間成長や境界

線が長くなることによるエネルギー損失の増大を明らかにする手がかりを与えてくれると考えている。

### 3. 6N次元位相空間のリアプノフ指数と輸送係数

レーザー爆縮の結果生じる超高密度プラズマでは粒子間距離が非常に短くなり、粒子間のクーロンポテンシャルエネルギー ( $e^2/a$ ,  $a$ : イオン球半径,  $4\pi a^3/3 = 1/n_i$ ,  $n_i$ : イオン数密度) が大きくなり、運動エネルギー ( $k_B T$ ) と同じ程度になる。その結果、プラズマは、粒子がクーロン力でお互いに相互作用を及ぼし合いながら運動する強相関多体系となり、個々の粒子間の相互作用が無視できる理想プラズマに対して強結合プラズマと呼ばれる。レーザープラズマはこれまで地上では実現が困難であった新しい物質の状態 ( $\Gamma \equiv e^2/ak_B T \sim 1$ ) を提供することになる。 $\Gamma$  をイオン結合係数というが、 $\Gamma \approx 1$  程度のプラズマでは適当な展開パラメータが存在せず物質の性質を解析的に取り扱うのは容易でない。

強結合プラズマのダイナミクスを粒子シミュレーションで扱うのも容易でない。クーロン力が長距離力があり、近接粒子間力による振る舞いだけでなく、集団的な運動も重要となる。このため、近接粒子間力を扱うのに適している分子動力学的手法と理想プラズマの粒子シミュレーションで用いられる空間格子法とを結合させた高精度の強結合プラズマ粒子コード (SCOPE) を開発した<sup>4)</sup>。SCOPE では、近接粒子間力と集団運動を起こすマクロな長距離力を同じ精度で扱うことができ、しかも非常に多くの粒子からなる系のダイナミクスを扱うことができる。

SCOPE を用いて行っている超高密度プラズマの基礎研究について紹介したい。決定論的な運動方程式に従う問題においても3体になるとその運動はカオスになることが知られている。クーロン相互作用を行う多体系において、初期位置と速度が少しだけ異なる2つの系を考えると、対応する粒子の位置と速度の差は時間とともに指数関数的に離れていく ( $x = \delta_0 \exp(\alpha t)$ )。この速さ ( $\alpha$ ) をリアプノフ指数と呼ぶ。リアプ

ノフ指数はクーロン相互作用を行っている粒子のマイクロなダイナミクスによって決定される。例えば、マイクロなゆらぎの相関とマクロな輸送係数との関係を結びつける久保公式 (揺動散逸定理) が存在するように、マイクロなダイナミクスにより決定されるリアプノフ指数と輸送係数とは密接に関係しているのではないかと推論し下記の研究を行っている。

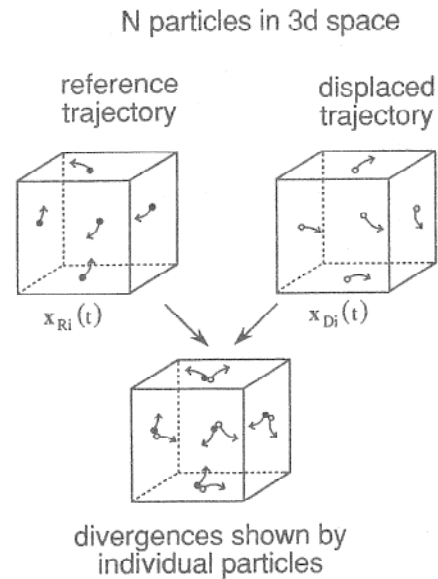


図6 N個の粒子の軌跡 ( $X_{Ri}(t)$ ) と初期位置と初期速度が少しだけ離れたN個の粒子の軌跡 ( $X_{Di}(t)$ ) は指数関数的に離れていく。

図6のように  $N (=500)$  個のイオンからなる系を考える。電子は縮退しており、一様な電荷分布を与えるだけでその運動は考えない。また、境界は周期境界とする。各イオンの速度は温度  $T$  のマクスウェル分布になるように与えられており、位置は熱平衡状態に近く比較的一様に分布している。各イオンの軌道は各イオンが受けるクーロン力と運動方程式を計算することによって求められる ( $X_{Ri}(t)$ ,  $V_{Ri}(t)$ ,  $i=1, 2 \dots N$ )。この与えられた系 (R) の各イオンの初期位置と初期速度が非常にわずかに異なるイオンからなる別の系 (D) を考え、この2つの系の6N次元位相空間のノルム

$$\Delta(t) \equiv \sqrt{\sum^N \{ |X_{Ri}(t) - X_{Di}(t)|^2 + |V_{Ri}(t) - V_{Di}(t)|^2 \}}$$

の時間発展を調べると、指数関数的に増大する。すなわち

$$\Delta(t) \cong \Delta(0)e^{\lambda(t)}$$

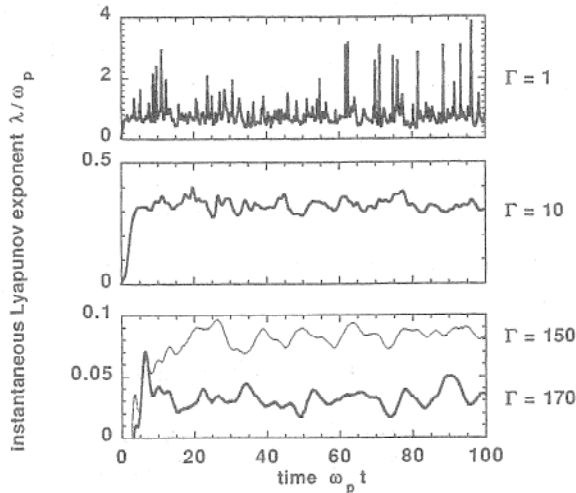


図7 いろいろなイオン結合係数(Γ)のプラズマのリアプノフ指数の時間変化。時間はプラズマ周波数 $\omega_p$ で規格化。

この速さ $\lambda$ がリアプノフ指数である。

いろいろなイオン結合係数の強結合プラズマについてリアプノフ指数の時間変化を示したのが図7である。時間はプラズマ周波数 $\omega_p$ で規格化してある。いずれの場合も瞬時リアプノフ指数の時間変化はカオティックであり、時間変化のスペクトルは $f^{-1}$ である。また、その値はイオン結合係数が大きくなるほど、すなわち高密度でクーロン相関が大きくなるほど小さくなる。

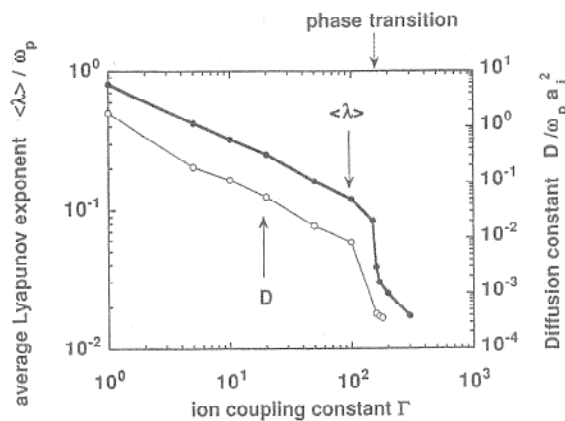


図8 時間平均リアプノフ指数、および拡散係数とイオン結合係数との関係

時間平均リアプノフ指数とイオン結合係数との関係を示したのが図8である。イオン結合係数が1~160の範囲では、リアプノフ指数 $\langle\lambda\rangle/\omega_p$ はだいたい $\Gamma^{-2/5}$ に比例する。 $\Gamma\sim 170$ 近傍でのリアプノフ指数の大きな跳びは相転移に対応している。すなわち、イオンのみが運動できる一成分強結合プラズマでは $\Gamma\sim 170$ 近傍で液体状態から固体状態に相転移することが知られている。図8に速度相関から求めた拡散係数 $D$ を示してあるが、この図から明らかなようにリアプノフ指数と拡散係数とは関係しており、その関数は $\langle\lambda\rangle/\omega_p\sim(D/a\omega_p^2)^{2/5}$ である。なぜこのような関係が存在するかはまだ明らかでないが、少なくとも、6N次元相空間のダイナミックスを表すリアプノフ指数とマクロな輸送係数とが関係するという推論は正しいようである。

#### 4. おわりに

レーザー核融合プラズマで生じるマクロなスケールでの複雑な現象について、すなわち、レーザー・テラー不安定面のフラクタル性と、強相関多体系の6N次元位相空間のリアプノフ指数のカオティックな振る舞いと輸送係数との関係を紹介した。これらの研究はまだ始まったばかりで海のものとも山のものともわからない状態である。計算科学的手法を用いてレーザー核融合炉の実現という長期的目標だけでなく、レーザー核融合プラズマに関連した基礎科学の進展にも寄与したいものである。

#### 参考文献

- 1) H. Takabe, K. Mima, L. Montierth and R. L. Morse, Phys. Fluids 28, 3676 (1985).
- 2) H. Sakagami and K. Nishihara, Phys. Rev. Lett. 65, 432 (1990).
- 3) 谷内俊弥, 西原功修, 「非線系波動」(岩波書店, 1977).
- 4) 西原功修, 核融合研究, 66, 253 (1991).