フラクタル上のスペクトル解析

研究ノート

福　島　正　俊*

Spectral Analysis on Fractals

Key Words：self similar fractal, integrated density of states, spectral dimension, Dirichlet from

1．研究の動機；媒体としてのフラクタル

フラクタルなる概念は自己相似的でかつ非整数の（フラクタル）次元を持つ図形としてB. Mandelbrot[1] がかなりあいまいに導入したものであるが，典型的な例としてはn-次元ユークリッド空間R^n内のシルピンスキ・ガスケット（以下SGと略記する）が挙げられ，そのフラクタル次元d_fは$[\log(n+1)]/[\log 2]$である．これは純粋に幾何学的な量であって，1/2縮小コピーを$n+1$個用意して適当に繋ぐと元の図形が復活するというSGの自己相似性に基づいている．SGは図1でご覧のようにporousな図形である．

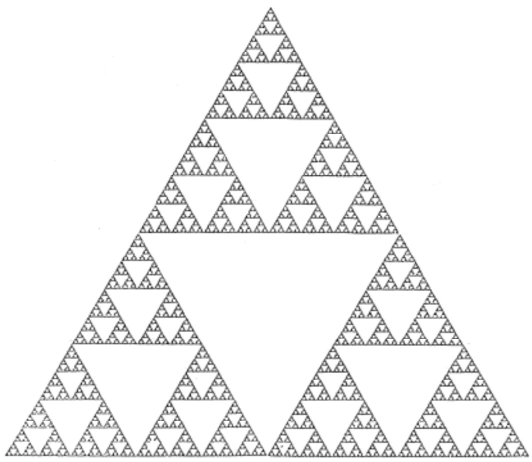

図1　平面上のSG

幾人かの物理学者達はフラクタルを単なる幾何学的対象としてstaticに捉えるのではなく，熱，ブラウン運動，波動を伝播する媒体とみなすことによってそのdynamicalな特性に迫ろうとした．フラクタルは適当な有限集合の増大する系列によって近似できる．この有限集合の上のランダム・ウオークの適切な繰り込み極限としてフラクタル上のブラウン運動が想定され，一方ランダム・ウオークの推移行列の固有値の正規化された分布の極限として積率状態密度（integrated density of states；IDS）$N(x)$が定義される．$N(x)$は$x \geq 0$の増加関数である．実はこのように複数な繰り込み操作を避けて定義される$N(x)$はフラクタル上のIDSではなく，その代替物としてのプレ・フラクタルと呼ばれる可算無限格子点集合上のIDSとみなされるべきものである．

さて通常の空間R^n上のラプラス微分作用素をΔとすると$-\Delta$のIDS $N(x)$は良く知られているように$x^{n/2}$に比例する．このようにIDSのみの情報に基づいて空間次元nを知ることが出来るわけである．Rammal-Toulouse[2] は上述の仕方でpre-SGのIDSを定義し，$N(x) \asymp x^{d_s/2}$なる関係を見いだした．ただし，$d_s=[2\log(n+1)]/[\log(n+3)]$．彼らは$d_s$をSGのスペクトル次元と呼んだが，$d_s$は常に2より小であり，$n \to \infty$のとき2に漸近する．$n$を大にする

* Masatoshi FUKUSHIMA
1935年8月23日生
1959年京都大学理学部数学科卒業
現在，大阪大学基礎工学部，数理教室，教授，理学博士，確率過程論
TEL　06－850－6460
FAX　06－850－6496
E-Mail　fuku@sigmath. osaka-u. ac. jp

とSGのフラクタル次元d_fの方はいくらでも大となるが，SGの物理的特性は直線と平面の間に納まることが示唆されていて大変興味深い．

Rammal[3]は更に進んでpre-SGのIDS $N(x)$が純粋不連続，即ちjumpのみで増加する関数であることを発見した．私がずっと以前random potentialを持つSchrödinger方程式のスペクトル理論を研究した時の経験によれば，potentialの個々のsampleは極めて不規則であるにもかかわらず，固有値分布の平均量としてのIDSは例外なく連続であり，端点でのLifschitz tailと呼ばれる特異性を除いては多くの場合滑らかな導関数(これが厳密な意味での状態密度である)を持っていた．80年代の後半にRammalの論文を初めて読んだとき，フラクタルの媒体としてのこのような極端なwildernessの現れに私は大変驚きその数学的事情をもっと本格的に調べたいと思った．

幸いなことに80年代後半には日本の数学者達によって，SG上のブラウン運動とラプラス作用素がそれぞれランダム・ウオークとその推移行列の定める差分作用素の適切な繰り込み極限として成功裡に構成されていた(楠岡[4]，木上[5])．SGの上にスペクトル理論を展開するためにどのような繰り込み操作を行えば良いのか見当がついていたのである．その結果Rammal達の上記の主張の拡張を含むスペクトル論理が直接SGに対して展開され(福島-島[6])，それは更により一般な有限分岐的と呼ばれるフラクタルの族に対して発展させられている(福島[7]，Malozemov[8]，木上-Lapidus[9]，福島-島[10])．以下にこれらについての簡単な説明を述べたい．目下のところではこれらは主に数学的なcuriocityから得られた結果という域を出ず，雑誌

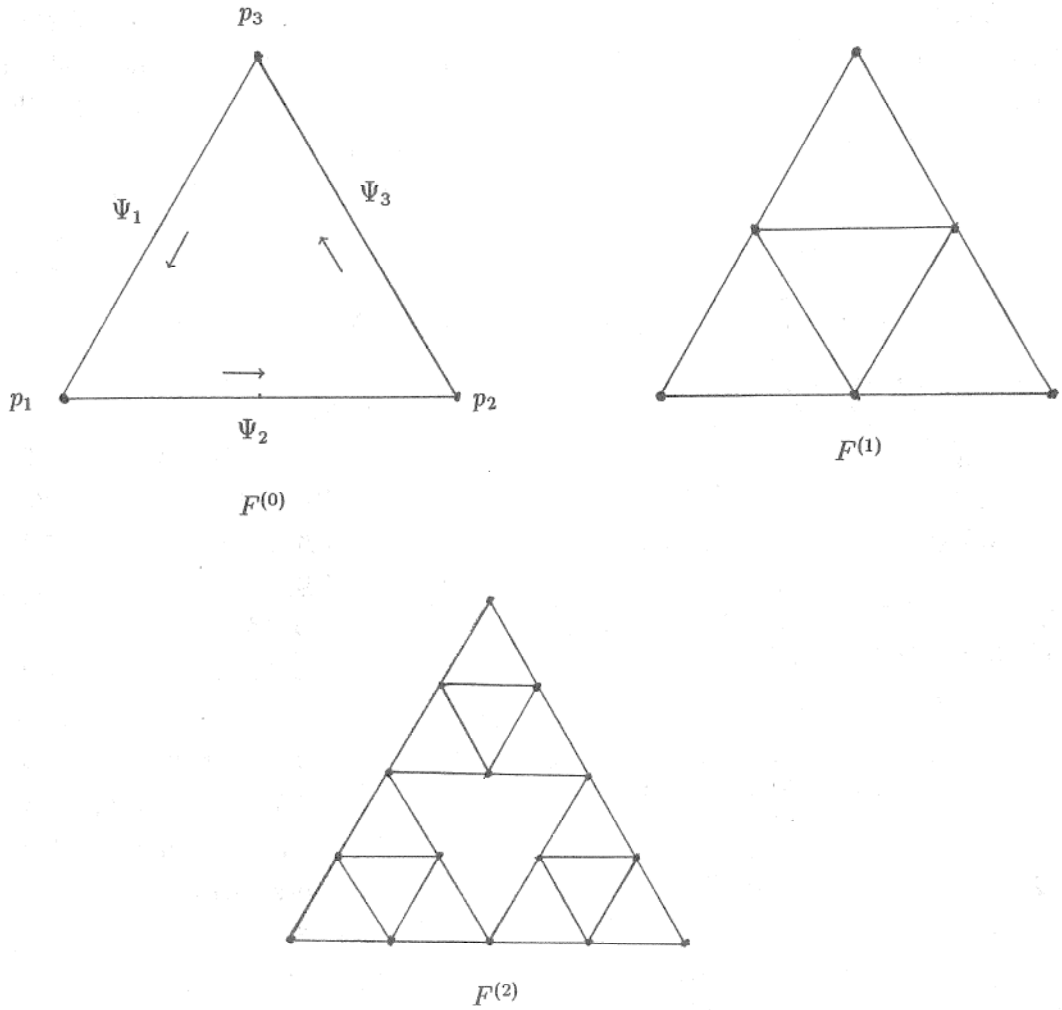

図2　SGの近似

「生産と技術」の記事としてはいささか気が引けるのではあるが，物理的媒体としてのフラクタルが最近の工学と様々な形で直接係わるものであり[11]，その基礎理論の一端としてのpotential applicabilityを持つことを期待を込めて表明して次節に進みたい．

2．フラクタル上のエネルギー汎関数と固有値

フラクタル上で固有値問題を定式化するための最も自然でしかも手っとり早い方法は，エネルギー汎関数に当たる量を適切に導入して用いる変分法である．図1で示される平面上のSG（これをEで表す）を例に取ろう．Eを含む一番外側の正三角形の頂点をp_1，p_2，p_3とし，p_iを動かさない1/2相似縮小変換で回転を伴わないものをΨ_iとする$i=1, 2, 3$．例えば簡単のためにp_1を原点に取っておけば，$\Psi_1 x=\frac{1}{2}x$（xは平面上の任意の点）である．Eの1/2縮小コピーを3個繋ぐとEが復活するというSGの自己相似性を式で表すと

$$E=\Psi_1(E)\cup\Psi_2(E)\cup\Psi_3(E).$$

頂点p_1，p_2，p_3に繰り返し変換Ψ_iを施すことによって以下のように有限集合の増大する列$F^{(m)}$，$m=0, 1, 2, \cdots$が定義される：

$$F^{(0)}=\{p_1, p_2, p_3\},\ F^{(m)}=\cup_{1\leq i\leq 3}\Psi_i(F^{(m-1)}),\quad m=1, 2, \cdots.$$

$F^{(m)}$の極限$\cup_{m=1}^{\infty}F^{(m)}$を$F^{(\infty)}$で表し，pre-SGと呼ぶ．これは可算無限集合であるが，その集積点の全体がシルピンスキ・ガスケットEに他ならない：$E=\overline{F^{(\infty)}}$.

$F^{(m)}$上の2点p，qがグラフでつながる隣接点のとき，$p\sim q$と表し，$F^{(m)}$上で定義された実数値関数uにたいして

$$\mathscr{E}^{(m)}(u, u)=(5/3)^m\Sigma(u(p)-u(q))^2$$

と置こう．注目すべきことは，この量がどのようなuに対してもmとともに増大することである．実際，不等式$\mathscr{E}^{(0)}(u, u)\leq\mathscr{E}^{(1)}(u, u)$は任意の実数$A_i$，$a_i$，$i=1, 2, 3$，に対して成立する初等的な絶対不等式

$$\begin{aligned}&(A_1-A_2)^2+(A_2-A_3)^2+(A_3-A_1)^2\leq\\&(5/3)\{(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_1)^2\}\\&+(5/3)\{(A_1-a_2)^2+(A_1-a_3)^2+(A_2-a_1)^2\\&+(A_2-a_3)^2+(A_3-a_1)^2+(A_3-a_2)^2\}\end{aligned}$$

に他ならないし，これから簡単な帰納法で$\mathscr{E}^{(m)}(u, u)\leq\mathscr{E}^{(m+1)}$を導くことができる．

そこで$F^{(\infty)}$上で定義された任意の実数値関数uに対して

$$\mathscr{E}(u, u)=\lim_{m\to\infty}\mathscr{E}^{(m)}(u, u)$$

と置くとこの値は無限大かもしれないが確定する．この値が有限であるような関数uの全体を$\mathcal{F}$と記すと，$\mathscr{E}$は関数族$\mathcal{F}$を定義域とする（エネルギー）汎関数である．$\mathcal{F}$に属す関数は$F^{(\infty)}$上で一様連続であることが分かるので$\mathcal{F}$はSG E上の連続関数の族の部分族と見なせる．$\mathcal{F}$に属す関数u, vに対してその内積$\mathscr{E}(u, v)$を$1/4[\mathscr{E}(u+v, u+v)+\mathscr{E}(u-v, u-v)]$によって定義し，Dirichlet formと呼ぶ．作り方から$\mathscr{E}$自体も次の自己相似性を持つ：

$$\mathscr{E}(u, v)=(5/3)\sum_{i=1}^{3}\mathscr{E}(u\circ\Psi_i, v\circ\Psi_i)$$

上の議論で繰り込み定数を5/3に取ったらなぜうまく行ったのかという問に対しては，この定数が[4),5)]で既に発見されていたとだけ答えておこう．ともかくもSG E上のエネルギー汎関数$\mathscr{E}$が導入されたのでそれに伴って，非負実数λが固有値で，それに対応する固有関数がuであるということを次の条件によって定義することが出来る：uは$\mathcal{F}$に属す自明でない関数で，任意の$v\in\mathcal{F}$に対して$\mathscr{E}(u, v)=\lambda\cdot(u, v)$．ここで右辺の内積$(u, v)$は$E$上のハウスドルフ測度に基づく$L^2$内積と呼ばれる量である．固有値は重複度も考慮して大きさの順に$\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\lambda_k\leq\cdots$と並べることが出来る．$x\geq0$に対して，$x$を越えない固有値の総個数を$\rho(x)$と記し固有値分布関数という．更にSG上のIDS $N(x)$は次のようにして定義される．単位シルピンスキ・ガスケットEの代わりにそれを2^m倍に拡大した拡大SGに対し上と同様に定められる固有値分布関数を$\rho_m(x)$とし，

$N(x)=\lim_{m\to\infty}\rho_m(x)/2^m$.

3. Nested Fractals

前節で平面上のSGに対してやや詳しく述べた議論は，より高い次元のR^n内のSGのみでなく，Lindstrom[12]がnested fractalと呼んだかなり一般のフラクタルに対してもそのまま適用できる．EをR^n内の一般の（自己相似）フラクタル，即ちある$\alpha>1$と自然数Nがあって，EはそのN個の$1/\alpha$-縮小コピーをうまくつなぐと復活するような図形とする．SGの他にも例えば図3のような雪片（$\alpha=3$, $N=7$），図4でその近似構成法を示唆する変形コッホ曲線（$\alpha=3$, $N=5$）等があるが，これらは皆その図形上の任意の2点が図形内を通る適当な連続曲線で繋げるという意味での連結性を持つにも係わらず，適当な有限個の点を取り除くと，非連結となるという1次元区間に近い特性を持つ．

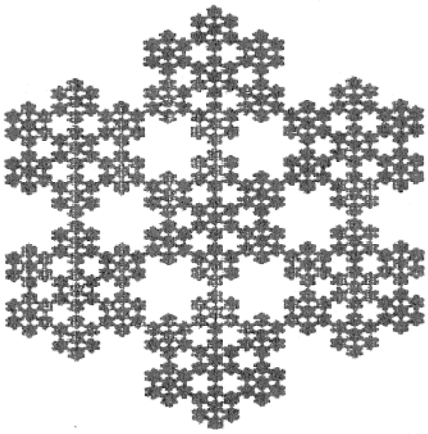

図3　雪　片

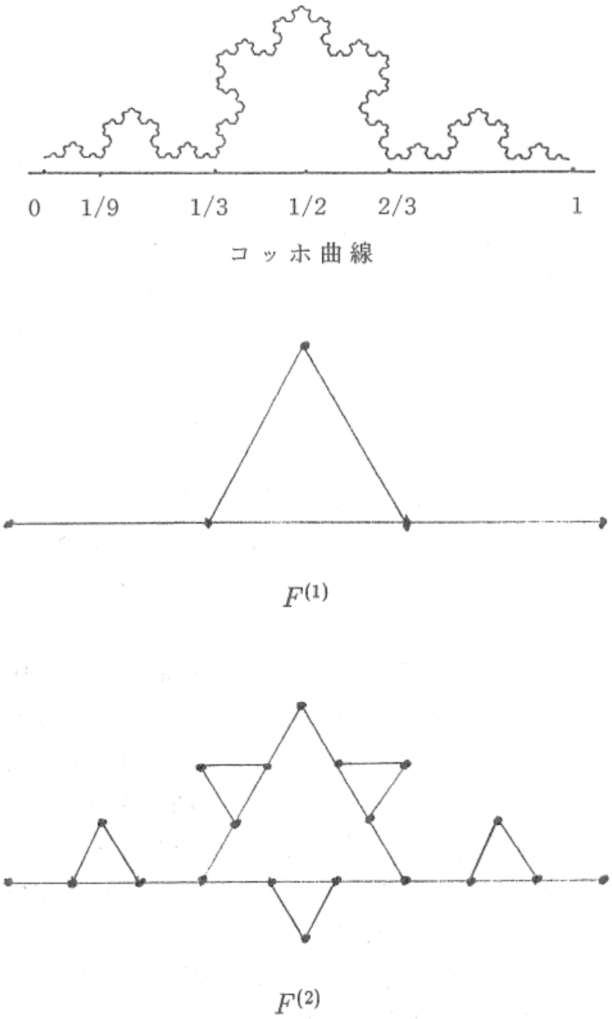

図4　変形コッホ曲線の作り方

この特性を有限分岐性と言い，有限分岐的でしかもある種の対称性を持つような（自己相似）フラクタルをnested fractalという．Eをparameter α，Nのnested fractalとすると，ある数$\beta\in(0,1)$が一意に定まり，E上のエネルギー汎関数$\mathscr{E}$であって前節での定数5/3を$1/\beta$に置き換えた自己相似性を持つものを前節と同様に作ることができる．そして前節の最後と同様な仕方でE上のIDS $N(x)$を導入すると，漸近的性質$N(x)\asymp x^{d_s/2}$が示されるのである[7),9)]．ここにd_sはnested fractal Eのスペクトル次元と呼ばれる量で，

$$d_s=2\log N/[\log(N/\beta)].$$

この値は常に2より小であり，nested fractalの有限分岐性の反映と思われる．平面上のSGは$N=2$, $\beta=3/5$の場合に相当する．

SGの場合のIDS $N(x)$が純粋不連続であることは福島-島[6]で証明されたが，Malozemov[8]は変形コッホ曲線の場合もそうであることを示し，[10])では更に不連続と成るための一般的条件が調べられている．

4. 参考文献

1) B. B. Mandelbrot, The fractal geometry of nature, W. H. Freeman, San Francisco, 1982.

2) R. Rammal and G. Toulouse, J. Physique Lettres 44 (1983), L13-L22

3) R. Rammal, J. Physique 45 (1984), 191-206
4) S. Kusuoka, in 'Probabilistic Methods in Mathematical Physics, 'Proc. of Taniguchi International Symp. eds. K. Ito and N. Ikeda, Kinokuniya, Tokyo, 1987, pp251-274
5) J. Kigami, Japan J. Appl. Math. 6 (1989), 259-290
6) M. Fukushima and T. Shima, Potetial Analysis 1 (1992), 1-35
7) M. Fukushima, in 'Ideas and Methods in Mathmatical Analysis, Stochastics, and Application', Vol 1, eds. Albeverio, Fenstad, Holden, Lindstrom, Cambridge Univ. Press, 1992, pp151-161
8) L. Malozemov, Commun. Math. Phys. 156 (1993), 387-397
9) J. Kigami and M. L. Lapidus, Commun. Math. Phys. 158 (1993), 93-125
10) M. Fukushima and T. Shima, Commun. Math. Phys. 163 (1994), 461-471
11) A. Bunde and S. Havlin (eds.), Fractals and disordered systems, Springer-Verlag, New York, 1991
12) T. Lindstrom, Brownian motion on nested fractals, Memoire AMS 420, 1989