分岐理論に基づく電力系統の非線形振動現象の解析

研究ノート

三　谷　康　範*

Analysis of nonlinear oscillations in power systems based on the bifurcation theorem

Key Words: power system, subsynchronous resonance, bifurcation theorem

1．は　じ　め　に

電力系統を恒常的に運用する上で，系統の安定度は非常に重要な概念である．電力系統の安定度を論じる場合，システムの特性を動作点の近傍で線形化し，何らかの線形システム理論に基づいて解析を行う方法は最も広く用いられているものの１つである．一方，電力系統は他の実システムと同様，種々の非線形特性を含んでいる．非線形特性は動作点回りのシステムの構造に大きい影響を与えるため，とくに大擾乱発生後の系の安定性を論じる上で重要である．

電力系統の非線形特性解析に関しては，これまでにも種々の試みがなされてきたが，その中でHopf分岐理論[1]を用いた場合，非線形微分方程式で表される系の非線形性に基づく周期軌道の存在を見いだせ，これを用いて非線形負荷などの影響による周期軌道の特性の解析を行った結果が報告されている．ここでは，直列コンデンサ（直コン）補償されたタービン発電機系で発生する低周波共振現象（Subsynchronous Resonance，SSR）[2]に関して，Hopf分岐理論を適用した結果，不安定平衡点の回りに数々の興味深い非線形周期軌道を見出したので，これについて紹介する．

* Yasunori MITANI
1959年1月5日生
1986年3月大阪大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程修了
現在，大阪大学大学院工学研究科，電子情報エネルギー工学系，助教授，博士，電力システム工学
TEL　06−879−7711
FAX　06−879−7713
E-Mail mitani@pwr.eng.osaka-u.ac.jp

2．Hopf分岐理論に基づく周期軌道の存在

一般の非線形システムを考え，その線形化システムにおいて，あるパラメータを変化させたとき虚軸を横切って安定性を変化させる１組の固有値が存在している場合を考える．このとき，他の固有値は全て安定であるものとする．安定なモードが速やかに安定平衡点を目指したとき，元の非線形システムの安定性は虚軸を横切るこのモードの安定性に依存する．このとき，この２次振動モードに他のモードの影響をも含めて表現した状態方程式として次式のNormal Form[1]と呼ばれるシステムが導出される．

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \{d\mu + a(x^2+y^2)\}x \\
&\quad - \{\omega + c\mu + b(x^2+y^2)\}y + \upsilon(5) \\
\dot{y} &= \{\omega + c\mu + b(x^2+y^2)\}x \\
&\quad + \{d\mu + a(x^2+y^2)\}y + \upsilon(5)
\end{aligned}
$$

ただし，$\upsilon(5)$はx，yの５次以上の関数である．

ここで，５次以上の項を無視して，システムを極座標表示すると，

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= (d\mu + ar^2)r \\
\dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2
\end{aligned}
$$

となる．第１式はθに無関係であり，この系を平衡させるのは$r=0$または$d\mu + ar^2 = 0$であ

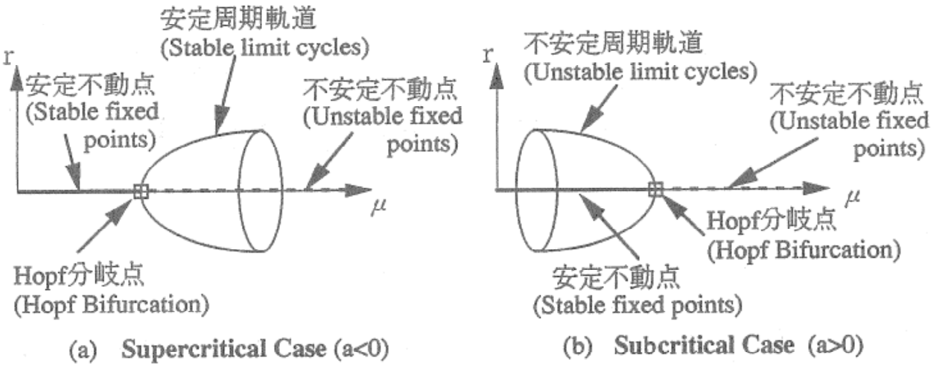

図1　Normal FormにおけるHopf分岐

る．前者は不動点であるが，後者は，$a \neq 0$，$d \neq 0$であれば$r = const.$で平衡し，このとき$\dot{\theta} \neq 0$であれば周期軌道を持つ．不動点と周期軌道の安定性は第1式を動作点近傍で線形化した方程式

$$\Delta \dot{r} = (d\mu + 3ar^2)\Delta r$$

の係数$(d\mu + 3ar^2)$に，不動点の場合は$r = 0$を，周期軌道の場合は$r = \sqrt{-(d\mu/a)}$を代入して，その正負（正：不安定，負：安定）で判断可能である．すなわち，不動点は$d\mu < 0$で安定，$d\mu > 0$で不安定，周期軌道は$a < 0$なら$d\mu > 0$のときに安定な軌道，$a > 0$なら$d\mu < 0$のとき不安定な軌道を持つ．$d\mu + ar^2 = 0$を$r - \mu$平面に描くとパラボラ状の面になり，$\mu = 0$で$r = 0$，すなわち不動点と一致する．図1は$d > 0$の場合にこの概略を示している．

不動点の安定性が変化する$\mu = 0$からパラボラ状に周期軌道が分岐している．この点がHopf分岐と呼ばれ，安定な周期軌道を作り出す場合がSupercritical分岐，不安定な周期軌道の場合がSubcritical分岐と呼ばれる．

一方，周期軌道もパラメータの変化に伴い特性を変化させる．こうした特性は周期軌道1周期ごとの点の動きを写像と考えたPoincaré写像の安定性を数値的に求めたFloquet乗数[1]によって知ることができる．

3．軸ねじれ共振における非線形周期振動

ここで用いた電力系統の動特性表現はSSRの解析において通常用いられる微分方程式[2]で，ばね質点系で表したタービン・ロータ軸の機械

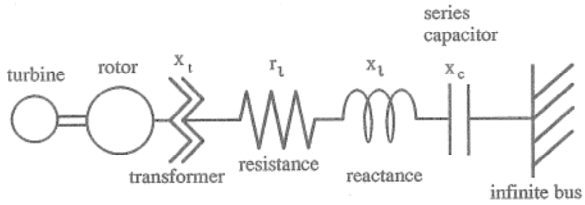

図2　電力系統の構成

系とパークモデルと呼ばれる発電機電気特性を表現する微分方程式で構成されている．図2に解析対象系統の構成を示す．送電線はインダクタンス分を持ち，よく知られているようにこのインダクタンス分によって交流系統で送電可能な電力は理論的に制限される．このとき自然な発想として直列コンデンサを送電線に直列に挿入してインダクタンス分を補償する方法を採用することができる．しかし，その副作用としてのSSRの発生が明らかになっている．そのメカニズムは以下のように定性的に説明できる．送電線はコンデンサの挿入によりLCの直列共振回路を形成する．その共振周波数fが交流f_0（関西では$f_0 = 60$Hz）との間ですべり周波数$f_0 - f$および$f_0 + f$を発生する．一方，タービン・ロータ間はシャフトを介して機械的に連結されここには機械的なねじれ振動が存在する．すべり周波数のうち低周波（Subsynchronous）分である$f_0 - f$がこの機械振動と同域に存在し，これを励振して不安定振動を引き起こす場合がある．この現象がSSRと呼ばれる．

図3は直列コンデンサ補償度x_cを可変パラメータとして分岐図を描いた結果である．図中の実線は安定不動点で破線は不安定不動点である．この不安定性がSSRに対応する．一方，

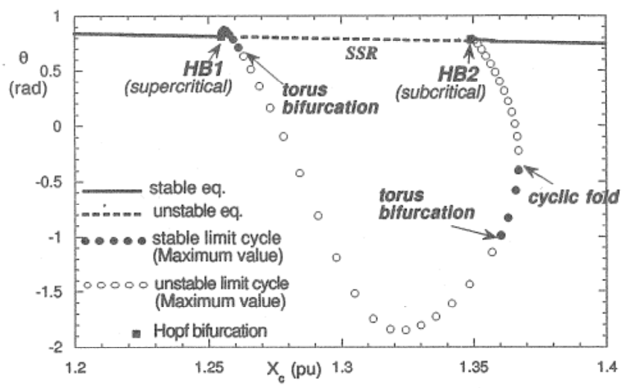

図3　直列コンデンサ補償に対する分岐図

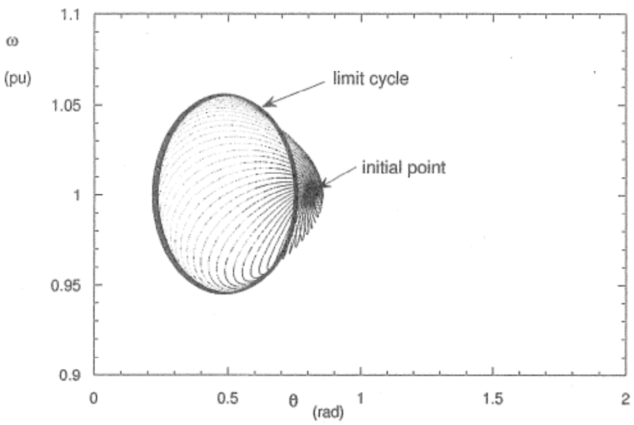

図4　安定周期軌道（単一周期）$x_c = 1.260$

黒丸は安定な周期軌道で白丸は不安定な周期軌道である．ただし，周期軌道はその最大値を表している．不動点の安定度が変化する際にHopf分岐が存在しており，それらから周期軌道が発生していることがわかる．このとき，周期軌道の安定度が変化する点がまた別の分岐となっており，この系統の場合トーラス分岐となっている．この後に示す時間波形からわかるようにトーラス分岐を過ぎると単一周期軌道自身は不安定となるが，それを取り囲む安定なトーラス軌道が発生する．

図4に安定な単一周期軌道を，図5，6に安定なトーラス軌道の時間波形を示す．図4では不安定不動点から単調に増加した軌道が最終的に安定な周期軌道に捉えられている．また，図5では一旦単一周期軌道に捉えられようとするが，徐々にその軌道から離れていき最終的にはトーラス状の軌道に捉えられている．図6では初めからトーラス軌道を目指している．

分岐図の周期軌道の最大値を表す枝は2つのHopf分岐を接続した構造を持っており，線形解析で論じられてきた軸ねじれ共振現象に対応する不安定不動点の回りには様々な周期軌道が存在していることが明らかになった．

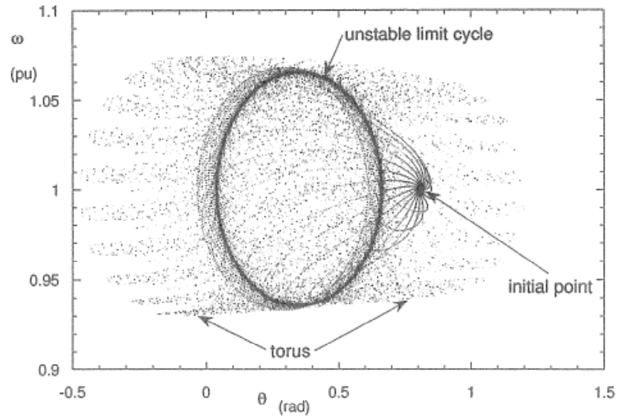

図5　トーラス軌道 $x_c = 1.2625$

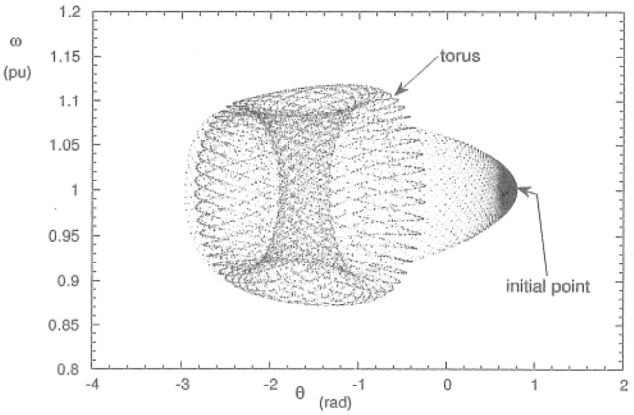

図6　トーラス軌道 $x_c = 1.3440$

4．まとめ

直列コンデンサ補償系統の低周波軸ねじれ共振現象（SSR）について，Hopf分岐理論に基づいて，その非線形周期軌道の特性解析を行った．その結果，線形化システム解析によってその不安定性が知られていた軸ねじれ共振現象において，非線形性に起因する周期振動現象が存在することが明らかになった．その非線形周期軌道は直列コンデンサ補償度の変化に伴い，特性が，Hopf分岐→（安定なlimit cycle）→torus分岐→（torus軌道）→torus分岐→（安定なlimit cycle）→cyclic fold→（不安定なlimit cycle）→Hopf分岐，の形で変化することが明らかになった．

エネルギー利用において利便性の点で電力の利用が急峻に増加している中，電力系統は益々巨大化・複雑化する傾向にある．こうした状況下で電力系統内で観測される様々な現象を理論的に把握した後種々の対策を講じる上でこうした非線形解析の重要性は今後さらに高まってくいものと考えられる．

なお，筆者は1994～1995年の10ケ月間文部省在外研究員として米国カリフォルニア大学バークレー校で研究を行う機会を得た．ここで紹介した研究結果はそのときの成果の一部である．貴重な機会を与えていただいた関係各位にこの場を借りてお礼申し上げます．

参考文献

1) S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, New York, 1990.
2) P. M. Anderson, B. L. Agrawal, J. E. Van Ness, Subsynchronous resonance in power systems, New York : IEEE Press, 1990.