強い相互作用をもつ反応拡散方程式系の研究

研究ノート

八　木　厚　志*

Strongly coupled reaction diffusion equations

Key Words: Strongly coupled, Reaction diffusion Equations

1．は　じ　め　に

領域$\Omega\subset R^d$($d=1, 2, 3$)内に複数種類の考察するべき対象物が，お互いに強く影響し合いながら分布している状況を考えます．各種類内では対象物の通常の拡散が，種類間では誘引あるいは排斥の作用が起こっているとします．また，異種の対象物の間には，互いに協同あるいは競合の関係があるとします．このような状況下の複数種類の対象物について，それらの空間分布が時間と共にどのように推移して行くかという問題を考えることにします．

以下に示すように，物理・工学をはじめとして生物学や経済学などの実に様々な問題が，このような数学問題としてモデル化されます．

本稿では，この問題に対する数学理論の最近の成果とそれの各数学モデルへの応用について報告したいと思います．

2．微分方程式の一般形

簡単のためΩ内には2種類A，Bの対象物が存在するとし，それぞれの密度分布を$u(x, t)$，$v(x, t)$で表すことにして，以下の条件を仮定します．

1．AおよびBの対象物は，それぞれFickの法則$a_1(u, v)\nabla u$, $a_2(u, v)\nabla v$により拡散する，ここで$a_1(u, v)$ ($i=1, 2$)は拡散係数である．
2．AとBの間には，誘引あるいは排斥の作用が働き，Aの流れおよびBの流れはそれぞれ$\nabla B_1(v)$, $\nabla B_2(u)$で表される，ここで$B_i(\cdot)$ ($i=1, 2$)は感応関数．($B_i'(\cdot)$が正ならば排斥で，負ならば誘引を示す．)
3．AとBは協同あるいは競合関係にあり，AとBの生産あるいは消滅の割合はそれぞれ$f_1(u, v)$，$f_2(u, v)$で表される．

以上の条件より，次のような偏微分方程式系

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla\cdot\{a_1(u, v)\nabla u + u\nabla B_1(v)\} \\
&\qquad + f_1(u, v), \quad x\in\Omega,\ t>0, \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla\cdot\{a_2(u, v)\nabla v + v\nabla B_2(u)\} \\
&\qquad + f_2(u, v), \quad x\in\Omega,\ t>0,
\end{aligned}
\qquad \cdots(1)
$$

が得られます．ただし，これを数学問題として実際に扱うには，さらに$\partial\Omega$上の境界条件と$t=0$での初期条件を附加する必要があります．

数学上の基本的な問題としては，解の存在と一意性，解の定性的性質，解の数値計算などあげられます．しかし応用上より重要な問題は，それぞれのモデルに特有で前もって期待される解の性質を，実際に数学理論から得られた解より直接的に導き出すということです．

*Atsushi YAGI
1951年2月1日生
1975年大阪大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了
現在，大阪大学(吹田市山田丘2－1)工学部応用物理学科，応用数学解析，教授，理学博士，解析学
TEL　06－879－7864
FAX　06－877－2900
E-Mail yagi@ap.eng.osaka-u.ac.jp

3．数学理論からの一般的結果

(1) は，偏微分方程式論の言葉では準線形放物型方程式系と呼ばれます．このような方程式を取り扱うには，最新の関数空間理論や関数解析学の成果をフル活用する必要があります．それでも，解法についての研究はまだ発展段階で，偏微分方程式の研究としてもまだ十分に研究の余地が残っています．

偏微分方程式系 (1) を直接扱うのは困難なので，以下のように無限次元空間の中の常微分方程式に抽象化して扱うことにします．適当な基礎関数空間を設定し，(1) をその空間の中で書き直して線形作用素を係数に持つような常微分方程式

$$\frac{dU}{dt}=A(U)+F(U),\quad 0\leq t<\infty \quad \cdots(2)$$

として表現します．この方程式に対し，$A(U)$ から作られる半群 $e^{A(U)t}$ (無限次元空間における不連続作用素の指数関数) を基にして時間的局所解の構成ができることが分かりました[1]．同時に (2) の時間的大域解も，解のアプリオリ評価式があれば自動的に求まることが分かりました．

解の存在と一意性を示す結果は，このように得られています．しかし，解の定性的な性質や数値解析などについての次のステージの研究は，いくつか興味ある結果もありますが，まだ進行中です．

4．半導体内の電子の流れ

よく知られているように，半導体内の電子と正孔の流れは，通常の拡散と電界によるドリフトから生ずると考えられています．さらに，温度が一定であると仮定すればEinstein関係式により拡散係数とドリフトの移動度は比例します．一方，平衡状態では伝導電子の密度と正孔の密度の積は一定値で，平衡状態が損なわれたときは，発生と再結合の機構により常に平衡状態へ戻ろうとすると考えられています．

以上のことから，温度が一定の場合の伝導電子密度 $n(x, t)$ と正孔密度 $p(x, t)$ について次のような方程式

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\nabla\cdot\{a_1(\nabla n-n\nabla u)\}-f(np-1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\nabla\cdot\{a_2(\nabla p+p\nabla u)\}-f(np-1)$$

が導かれます[2]．ここで，$u(x, t)$ は

$$\varepsilon\Delta u=n-p$$

で与えられる静電ポテンシャルです．また，平衡状態は $np=1$ と正規化しています．$a_i(i=1, 2)$ は拡散係数で一般に ∇u の関数と考えられます．

この方程式系について，最近Fang-Itoは大域解の存在を示しました，また解の漸近的な挙動についても調べています[3]．しかし，解の詳しい挙動については，まだ明らかになっておらず今後の研究発展が待たれます．

5．細胞性粘菌の走化性

細胞性粘菌は，いくつかの特異な生態の一ステージにおいて，お互いに他の個体を誘引しあうような化学物質を分泌して，空間内のいくつかの地点に集合体をつくることが観察されています．このような生態は走化性といわれますが，Keller-Segelはこのメカニズムを数学的に表現するために次のようなモデル

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla\cdot\{a_1\nabla u-b_1 u\nabla\log\rho\},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=a_2\Delta\rho+f_2 u-g_2\rho,$$

を導入しました[4]．$u(x, t)$ は粘菌の密度分布を，$\rho(x, t)$ は化学物質の濃度分布を表しています．

この方程式の解の定量的な挙動は，調べられています[5]．しかし，走化性についての詳しい情報を，求まった解の定性的な挙動から直接明らかにすることは，まだ未解決の問題として残っています．

6．労働力の移動を組み入れた経済成長

アジア地域の発展途上国では，都市部と農村部の経済格差に起因する労働力の移動が顕著で，一国の経済成長モデルを考えるときその影響が

無視できなくなっています．新古典派の経済学では，成長の基礎方程式として

$$\frac{dK}{dt}=f(K,L)-\mu K-\varepsilon L$$

が使われます，ここでKは資本高，Lは労働力，$f(K,L)$は生産関数，μ, εはそれぞれ定数です．

この方程式に労働力移動を表す新たな方程式を付け加えることにします．経済原理によれば，労働者は単位労働力当たりの資本高，すなわち$R=K/L$が高い地域に向かって移動するとあります．これを流体力学的に解釈して，労働力の流れは$\nabla B(R)$で決まると仮定をすることにします，ここで$B(R)$は労働者の感応関数．こうして$L(x,t)$についての方程式

$$\frac{\partial L}{\partial t}=\nabla\cdot\{a\nabla L-L\nabla B(K/L)\}$$

が導かれます[6]．

このように，流体力学に基礎を置く一つの労働力移動モデルが導入されましたが，実はまだ，この方程式の解の性質を調べる研究には手がついてません．今後の課題として残されています．

7．おわりに

物理・工学，生物学，経済学における様々な問題が，強い相互作用をもつ反応拡散方程式としてモデル化され，その方程式系に対する数学理論が現在発展しつつあります．今後，数値解析や定性理論の研究に進展すれば，数学解の示す詳細な性質が明らかにされ，数学モデルの現実モデルへの応用が一層確実なものになることと期待されます．

参考文献

1) A. Yagi, *Bollettino U. M. I. (7)* 5-(B) (1991), 341-368.
2) S. M. Sze, *Physics of semiconductor Devices, Wiley, New York, 1981.*
3) *W. Fang-K. Ito, J. Diff. Equ.* 123 (1995), 523-566.
4) E. F. Keller-L. A. Segel, *J. Theor. Biol.* 26 (1970), 399-415.
5) A. Yagi, *Math. Japonica* 45, in press.
6) Y. Nagabuchi, K.Ohnaka, A.Yagi, *Funkcial Ekvac., in press.*