研究ノート

ウェーブレット理論紹介

長 瀬 道 弘*

Introduction to wavelet theory

Key Words : wavelet, time-frequency analysis, singularity, internet

1. 前 書 き

この冊子のタイトルである「生産と技術」とはあまり縁のなさそうな純粋数学の研究者が，ここで研究に関連した1文を載せることにやや違和感を覚えられる読者も少なからずあることが予想され，小生としてはやや気恥ずかしく感じている．しかし，純粋数学と工学とが無関係ではなく，純粋に工学的な問題が純粋数学に影響を与えることもあり，言ってみれば数学は「実学」と無関係ではないことを表す格好の例として「ウェーブレット理論」について，簡単に紹介してみたい．

記憶がはっきりしないので正確ではないかもしれないが，10年以上も前のこと大阪大学の工学部のある先生から，「ウェーブレットについて聞きたいのだが」という電話をいただいた．残念ながらこの頃は，私自身この言葉の意味するところすらよく理解できなかった．その後，この数学的な理論が1980年代なかばに，実関数論やフーリエ解析の著名な研究者であるフランスのY. Meyerによって推進させられさらにPrincetonのI. Daubechiesその他の数学者によって実用上有効な仕事がなされたことを知り，解析学の一つである偏微分方程式にかかわり，「擬微分作用素論」を研究してきた私自身にも無関係な話題でないことがわかって，数年前から数名の共同研究者とともにウェーブレット理論を研究するようになった．

* Michihiro NAGASE
1944年2月13日生
1968年大阪大学大学院理学研究科修士課程修了
現在，大阪大学・大学院理学研究科・数学専攻，教授，理学博士，数学(解析学)
TEL 06－6850－5710
FAX 06－6850－5713
E-Mail nagase@math.wani.osaka-u.ac.jp

2. 時間周波数解析

工学の様々な分野で，フーリエ解析が用いられている．フーリエ解析は工学的には時間周波数解析の基本的な手段であると言うことができる．数学的には，関数解析の1分野に属しており，いわゆる時間周波数解析は数学的には超局所解析という言葉で言い表される．超局所解析は通常は多次元の場合に扱われることが多く，数学的には偏微分方程式論との関わりで語られることが多い．たとえば，偏微分方程式論の中心的な話題の一つとして波動方程式を一般化した双曲型偏微分方程式の研究があげられるが，この双曲型偏微分方程式の研究において特異性の伝播の研究や波面集合の研究などはまさにこの超局所解析が中心的役割を果たしている．時間周波数解析という言葉は近年関数解析学や偏微分方程式論あるいは擬微分作用素論など数学の研究分野においても用いられるようになってきたが，工学的な意味合いが感じられる言葉である．時間周波数解析にフーリエ解析ではなくより関数解析的な手段を用いて，具体的な問題に応じた時間周波数解析を行うことを目的としてウェーブレット理論が生まれたのである．

3. ウェーブレット理論の誕生

私の共同研究者の一人である芦野隆一氏を著者の一人とする解説書1)によれば

「現在のウェーブレット理論の歴史は非常に浅く，80年代初めに現れたにすぎない．しかし，理論的アイデアにしても実際の応用にしても大部分はウェーブレットが数学における新しい道具として現れるずっと以前から知られていたことなのである．…(中略)…．現在のウェーブレット理論は1980年代初頭にモルレー(Morlet)が考えた“wavelets of constant shap”を使った新しい時間周波数解析に始まるとされている．…(中略)…．モルレーは1975年ごろガボー

ル変換を使って石油探査を行うフランスの石油会社Elf-Aquitaineのエンジニアであった．石油探査の標準的方法は地中に振動や衝撃を与えてその反射波を解析するというもので，反射波は直接反射してくる波や何度か反射を繰返してくる波が入り交じっていて地層が数百もあるので解析は困難をきわめていた．新しい強力なコンピュータを導入し，ガボール変換による詳しい時間周波数解析をしてもなんら新しい結果を生み出さなかった．そこでモルレーは全く新しい発想のもとに，ひとつの波を拡大縮小して時間周波数解析の短い波"wavelets"に使ったのである．モルレーはこの波を"wavelets of constant shape"と呼んだ．ウェーブレット変換の誕生である」と説明されている．このように，現在のウェーブレット理論はきわめて実用的な技術的な要請から生まれてきたのである．

4．ウェーブレットとは

ここでウェーブレットについて簡単に説明しておこう．

与えられた関数$f(x)$をフーリエ級数展開すると

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}$$

ただし，

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ \ k=0,1,2,\cdots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,\ \ k=0,2,\cdots$$

と書くことができる．このとき，係数a_kやb_kのk→∞のときの挙動によって関数$f(x)$がどの程度なめらかであるかあるいはどの程度不連続性があるかなどを決定することができる．残念ながら，フーリエ級数ではなめらかさの程度を計ることはできるが，不連続性や特異性が現れる場所(xの値)を特定できない．このためフーリエ窓関数を用いるなどそれなりに工夫がなされている．なめらかでない関数のなめらかでない場所を探すということは，言ってみれば特別な場所を探すことであるから応用上もっとも大切であることは容易に想像できる．その典型的な例が，モルレーの石油探索すなわち地中に石油が存在し得るような特異な場所を探すということに現れている．

関数$\psi(x)$がウェーブレット関数とは，あらっぽく言うと$\{\psi_{jk}(x)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$が$L^2(\mathbf{R})$上の正規直交基底となることをいう．ここで，$\psi_{jk}(x)$は整数$j$と$k$に対して，

$$\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$$

である．言い換えると，与えられた関数$f(x)\in L^2(\mathbf{R})$が

$$f(x) = \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} c_{jk}\,\psi_{jk}(x)$$

て書き表されることになる．ただし，ここでc_{jk}はウェーブレット係数と呼ばれ，

$$c_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{jk}(x)dx$$

である．ウェーブレット関数が短い波であるなら，パラメーターkは位置(あるいは時間)に対応する．2^jは周波数に対応するので，パラメーターjは周波数の対数に対応しスケールと呼ばれる．また，ウェーブレット関数が

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx = 0$$

を満たすなら，つまり適当に振動しているなら，関数$f(x)$の急激な変化が起こった位置kとその変化のスケールjに対応するウェーブレット係数c_{jk}の絶対値$|c_{jk}|$が大きな値を持つ．従って，関数のウェーブレット係数を調べることにより，関数の持つ不連続性や特異性の位置とスケールをある程度特定できる．問題は適当なウェーブレット関数を見つけることにあり，現在では使用目的に応じて多くのウェーブレット関数が構成されている．

5．ウェーブレット理論の現状

ウェーブレット理論の応用として早くから知られていたのは，アメリカのFBIの指紋検索システムに関するものであろう．現在では，ウェーブレット理論の応用範囲はその当初から考えると飛躍的に広がって来ている．この理論が時間周波数解析の新しい方法であることを考慮すれば，時間周波数解析が必要とされる分野には適用が可能であり，画像解析，信号処理あるいは経済現象の研究への応用など様々である．応用の中でも特に顕著なものとして画像解析

への応用があげられるが，これは適当なウェーブレットを用いて画像を分解すると，多くのウェーブレット係数が0に近い値を持つので，この係数を0にすることで大幅に情報量を減らすことが可能になり画像圧縮に有効であるからである．近年，日本においてもウェーブレット理論を応用して工学的な問題を取り扱うことが多くなってきた．純粋に理論的なあるいは数学的なウェーブレット理論研究者は今のところ日本では多いとはいえないが，インターネットがますます盛んになる現状を考えれば，ウェーブレット理論は理論と応用の両面から研究者が増加することが期待される．

応用が盛んになるにつれて，ウェーブレット理論に関する様々な教科書や参考書が出版されるようになってきた．基礎理論を学ぶには，1）や2）は格好のものであろう．また応用面でも様々な参考書が出版されるようになってきたが，基礎理論の参考書も含めて1）や2）に引用されている文献を参照されたい．

References

1）芦野隆一，山本鎮男，ウェーブレット解析 ー誕生・発展・応用ー，共立出版，1997
2）ヘルナンデス/ワイス，ウェーブレットの基礎，科学技術出版，2000(芦野，萬代，浅川，訳)