アルゴリズム・連分数・可積分系

研究ノート

中　村　佳　正*

Algorithms, Continued Fractions and Integrable Systems

Key Words：Euclidean algorithm, qd algorithm, continued fractions, discrete-time integrable systems, Toda equation

1．は　じ　め　に

工学系における数学研究には伝統的に二つのスタイルがある．一つは工学の問題に起源をもつ概念や手法の数学的一般化と理論化を目指す研究で「応用数学」と称されることが多い．もう一つは，数理的手法を数学的に精密化し機能を高めることで現実の工学問題の解決を計る研究で「数理工学」と呼ばれる．両分野は互いに補完する関係にあり，連携しながら発展することが望ましい．しかし，目標の違いのためか没交渉の状態に陥り易く，住み分けすら見られるのが現状である．本論では筆者が行っている応用数学と数理工学の両分野にまたがる研究について解説する．

2．Euclid互除法と連分数

「アルゴリズム」という言葉がEuclid互除法を指した時代もあったという．高校数学にも登場する互除法は現代でも最も知られたアルゴリズムであろう．A_0, A_1を自然数とする．互除法の手順

$$A_k = A_{k+1} \cdot Q_k + A_{k+2}, \quad Q_k\text{:商（自然数）},$$
$$0 \leq A_{k+2} < A_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$

ただし，$A_{m+2}=0$，により，素因数分解に比べてはるかに少ない計算量でA_0, A_1の最大公約数A_{m+1}を求めることができる．互除法は，同時に，有理数A_0/A_1の連分数展開

$$\frac{A_0}{A_1} = Q_0 + \frac{1|}{|Q_1} + \frac{1|}{|Q_2} + \cdots + \frac{1|}{|Q_m}$$

を与えることに注意する．

無理数も互除法と類似の手続きで連分数展開できる．aを無理数，$[a]$をaを越えない最大整数とする．$a = 1 \cdot q_0 + a_2$, $q_0 = [a]$, $0 < a_2 < 1$と書けるが，これを続けて

$$a_k = a_{k+1} \cdot q_k + a_{k+2}, \quad q_k\text{:商（整数）},$$
$$a_1 = 1, \quad 0 < a_{k+2} < a_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

とし，整数の列q_0, q_1, …を得る．aが無理数であるからこの手順は互除法にように途中で停止することはなく，無限連分数

$$q_0 + \frac{1|}{|q_1} + \frac{1|}{|q_2} + \cdots$$

は無理数aに収束する．もし，手順を途中で止めれば，aに近似する有限連分数が得られる．例えば，$a=\pi$については簡単な計算で近似分数22/7，355/113などを得る．

Euclid互除法は多項式の最大公約数の計算にも有効である．多項式$P=P(x)$の次式を$\deg P$と記す．有理数係数の多項式に対する互除法の手順は

$$P_k = P_{k+1} \cdot Q_k + P_{k+2}, \quad Q_k\text{:商（多項式）},$$
$$0 \leq \deg P_{k+2} < \deg P_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$

*Yoshimasa NAKAMURA
1955年10月9日生
1983年京都大学大学院工学研究科博士課程数理工学専攻修了
現在，大阪大学・大学院基礎工学研究科・情報数理系専攻・数理科学分野，教授，工学博士，応用数学・数理工学
TEL　06－6850－6475
FAX　06－6850－6496
E-Mail naka@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

ただし，$P_{m+2}=0$である．有限回の反復で，P_0，P_1の最大公約数P_{m+1}を得ると同時に，有理関数P_0/P_1の連分数展開も実現される．互除法が適用可能な代数系はEuclid整域という数学的概念に一般化されているが，そのうち，有限体の場合，互除法はBCH-Goppa符号の復号法として現代のデジタル通信技術の基礎となっている．すなわち，エラーの混じった受信信号から定まるシンドローム多項式とGoppa多項式への互除法の適用により，エラーの位置と値が判別されエラーが訂正されるのである．この意味で互除法は古くて新しいアルゴリズムといえよう．

3．互除法からqdアルゴリズムへ

前節では互除法は連分数展開に他ならないことをみた．ここでは，実数係数多項式に対する互除法のうち以下の特別な場合を考える．多項式$P_k(x)$は$m-k$次で最大次数の項の係数が1，商$Q_k(x)$は1次多項式で定数J_{k+1}を用いて$Q_k=x+J_{k+1}$と書けるものとする．すなわち，適当な定数V_{k+1}を用いて

$$\begin{aligned}&P_k=P_{k+1}(x+J_{k+1})-V_{k+1}P_{k+2},\\ &\deg P_k=m-k,\quad k=0,1,\ldots,m\end{aligned}$$

と書ける場合である．これにより有理関数の連分数展開

$$\frac{P_0(x)}{P_1(x)}=\frac{1|}{|x+J_1}-\frac{V_1|}{|x+J_2}-\cdots-\frac{V_{m-1}|}{|x+J_m}$$

が記述される．以下では係数J_k,V_kに対してkとは別の離散パラメータ$n=0,1,\cdots$を導入して，互除法とは異なるアルゴリズムを定式化する．

まず，零でない定数ϵを用いて

$$q_k^{(0)}=1-\epsilon J_k,\quad e_k^{(0)}=\epsilon^2V_k$$

と書き，さらに，数列$q_k^{(n)}$, $e_k^{(n)}$を漸化式

$$\begin{aligned}&q_{k+1}^{(n)}e_k^{(n)}=q_k^{(n+1)}e_k^{(n+1)},\\ &q_{k+1}^{(n)}+e_{k+1}^{(n)}=q_{k+1}^{(n+1)}+e_k^{(n+1)},\\ &e_0^{(n)}=0,\quad k=0,1,\ldots,m,\quad n=0,1,\ldots\end{aligned}$$

に従って導入する．$q_k^{(n)}$, $e_k^{(n)}$の相互関係は表

$$\begin{array}{cccccc}
 & q_1^{(0)} & & & & \\
e_0^{(1)} & & e_1^{(0)} & & & \\
 & q_1^{(1)} & & q_2^{(0)} & & \\
e_0^{(2)} & & e_1^{(1)} & & e_2^{(0)} & \\
 & q_1^{(2)} & & q_2^{(1)} & & \ddots \\
e_0^{(3)} & & e_1^{(2)} & & \ddots & \\
 & q_1^{(3)} & & \ddots & & \\
\vdots & & \ddots & & & \\
 & \vdots & & & &
\end{array}$$

により容易に理解できよう，$e_0^{(n)}=0$とおき，表を上から下に計算すれば，数列は$n\to\infty$で$q_k^{(n)}\to\lambda_k$，$e_k^{(n)}\to 0$のように収束するが，極限λ_kの逆数$1/\lambda_k$は$m\times m$行列

$$\begin{pmatrix}
q_1^{(0)} & q_1^{(0)}e_1^{(0)} & & & 0\\
1 & q_2^{(0)}+e_1^{(0)} & q_2^{(0)}e_2^{(0)} & & \\
 & 1 & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & q_{m-1}^{(0)}e_{m-1}^{(0)}\\
0 & & & 1 & q_m^{(0)}+e_{m-1}^{(0)}
\end{pmatrix}$$

の固有値に他ならない(cf. [1])．これをRutishauserのqdアルゴリズムという．このアルゴリズムの改良版(QRアルゴリズム)は中規模の行列に対する標準的な固有値計算法として広く用いられている．

また，正則関数$f(x)$のべき級数展開

$$f(x)=f_0+f_1x+f_2x^2+\cdots$$

が与えられたとき，$e_0^{(n)}=0$，$q_1^{(n)}=f_{n+1}/f_n$，$n=0,1,\cdots$，とおいてqdアルゴリズムを表の左から右に運用すれば，$O(m^2)$の計算量で$f(x)$のm次連分数近似(Padé近似)が求められる．特に，連分数が収束する場合は，

$$f(x)=\frac{f_0|}{|1}-\frac{q_1^{(0)}x|}{|1}-\frac{e_1^{(0)}x|}{|1}-\frac{q_2^{(0)}x|}{|1}-\cdots$$

となる．この計算はパラメータnの導入により可能となったEuclid互除法の本質的な拡張である．有限体上のqdアルゴリズムによるBCH-Goppa復号化も

研究されている．

4．qdアルゴリズムから可積分系へ

なぜqdアルゴリズムに固有値計算や連分数近似の機能があるのかは，このアルゴリズムに潜む「離散時間可積分系」の構造の発見によって初めて十分に理解できるものとなった(cf. [1])．これをベースキャンプとして，数列の収束加速法やLaplace変換の計算への応用[2]などqdアルゴリズムへの新しい機能の付加や，別の可積分系による連分数展開型の新しいアルゴリズムの設計[3]へと研究は進展している．本節では，qdアルゴリズムの漸化式から連続時間可積分系へのルートについて簡単に説明する．

$$J_k(n) = (1 - q_k^{(n)})/\epsilon, \quad V_k(n) = e_k^{(n)}/\epsilon^2$$

とおいて$J_k(n)$, $V_k(n)$の満たす漸化式

$$\begin{aligned}
&(J_k(n+1) - J_k(n))/\epsilon = V_{k-1}(n+1) - V_k(n),\\
&(V_k(n+1) - V_k(n))/\epsilon\\
&= V_k(n+1)J_k(n+1) - V_k(n)J_{k+1}(n),
\end{aligned}$$

を得る．左辺がnについての前進差分であることに注意して極限操作$\varepsilon \to 0$，ただし，$t = n\varepsilon$，を行う．漸化式は$V_k = V_k(t)$, $J_k = J_k(t)$に関する微分方程式系

$$\frac{dJ_k}{dt} = V_{k-1} - V_k, \quad \frac{dV_k}{dt} = V_k(J_k - J_{k+1})$$

に移行するが，これはよく知られた可積分系である戸田方程式に他ならない．戸田方程式は非線形相互作用をする1次元の格子モデルとして30年余り前に提唱されたが，意外にもその時間離散化は多様な機能をもつqdアルゴリズムであることになる．

なお，可積分系とは元来古典力学の用語で，なんらかの意味で線形化可能，あるいは，線形系と関連づけられる非線形力学系の総称である．Newtonによって求積された重力場の2体問題，単振子，種々のコマの運動方程式などが古くから知られている．可積分系は複雑系に対比される概念である．完全積分可能なHamilton系や戸田方程式，KdV方程式を代表とするソリトン系などはこのサブクラスであるが，可積分系全体を包括するような数学的定義はまだない．解を具体的に書き下すことが可能な非線形系と理解されることも多い．

qdアルゴリズムから戸田方程式への変形の背後には，qdアルゴリズムの漸化式の一般項がそのまま戸田方程式のHankel行列式解に移行することが見て取れる．逆に，連続時間可積分系の解の表示を保つような時間離散化によって離散時間可積分系(アルゴリズムの漸化式)が導入される．これは通常のRunge-Kutta法等による差分スキームとは全く異なる離散力学系の構成法である．

5．お　わ　り　に

本論では，「可積分系の応用数学・数理工学」について連分数に関係した話題を中心に解説した．応用数学としては，アルゴリズムとの出会いをきっかけに離散時間可積分系の理論が一段と進展したことが重要である．一方，離散時間可積分系によるアルゴリズム開発という数理工学の研究も着々と成果をあげている．この新しい研究領域をさらに開拓するには，応用数学と数理工学のセクショナリズムに捕われない自在な発想が肝要であろう．

[1] 中村編著，可積分系の応用数理，裳華房，2000．
[2] Y. Nakamura, SIAM J. Sci. Comput. 20 (1999) 306-317.
[3] A. Mukaihira and Y. Nakamura, Inverse Problems, 16 (2000), to appear.