生産と技術　第52巻　第4号　(2000)

随　　筆

「ゲーム」の数字

川　中　宣　明*

“Games” and Mathematics

Key Words：Games, Mathematics, Surreal numbers

ツェルメロの定理

ツェルメロは20世紀の初めに，公理的集合論という純粋数学の分野で基本的な貢献をしたドイツの数学者である．そのツェルメロが，1912年に「集合論のチェスへの応用」という短い論文を発表した．主な結果は次の「ツェルメロの定理」である．

「2人のプレイヤーで勝負し，有限回の着手で終了する(勝負が決するか，または引き分けとなる)，偶然性の入り込まないゲームにおいては，いずれかのプレイヤーに必勝戦略があるか，または，両方のプレイヤーに悪くとも引き分けにできる戦略がある」

この定理によれば，チェス，将棋，囲碁，五目並べ，オセロ・ゲームなどにおいては(場合によっては，有限回の着手で勝ち負け，または引き分けが決するようなルールを付け加えることにより)

①先手に必勝となる戦い方が存在する
②後手に必勝となる戦い方が存在する
③両者に悪くとも引き分けとなる戦い方が存在する

の3つの可能性のうちのどれかが成り立つということになる．

ツェルメロの定理は，「コロンブスの卵」のようなもので，言われてみれば，少し数学の訓練を受けた人にとって自分で証明するのも難しくない．しかし，(数学者も含めて)殆どの人は初めてこの定理を聞かされたとき，目を丸くする．とくに，将棋，囲碁などの強い人程，意外性を感じるものらしい．注意しなければいけないのは，この定理が典型的な「存在定理」である，ということである．定理が主張するのは「… または … が存在する」ということだけなのである．例えば①が成り立つときでも，先手必勝となる戦い方がどんなものなのかについては，この定理からは，何の情報も得られない．それどころか，囲碁について①～③のうちのどれが成り立ちそうなのか，ということについても何のヒントも与えてはくれないのである．つまり，ツェルメロの定理は純粋に理論的な定理であって，例えば，囲碁が強くなりたい，または強い将棋ソフトを作りたい，というような実用上の目的には何の効果ももたないのである．ここまで説明すると，先ほどまで驚いていた人たちも，一様にがっかりと安心が相半ばしたような表情に変わる．

フォン・ノイマンたちのゲーム理論

フォン・ノイマンは公理論的集合論，量子力学の数学的基礎，フォン・ノイマン環の理論，フォン・ノイマン型計算機，オートマトンの理論など，スケールの大きな数学上の仕事をつぎつぎと成し遂げ，万能の天才といわれている．そのフォン・ノイマンが経済学者モルゲンシュテルンと組んで『ゲームの理論と経済行動』という大著を著したのは1944年のことであった．天才による自信満々の新分野への挑戦である．ところが当時の数学者の評価も，肝心の経済学者の評価も今ひとつであったらしい．(数学者の評価はその後も，今ひとつ，である.) 現在，ゲーム理論の中心概念とされるナッシュ均衡，ナッシュ・プログラムをもう一人の天才数学者ナッシュが21歳

* Noriaki KAWANAKA
1946年4月1日生
1970年京都大学大学院理学研究科修士課程修了
現在，大阪大学大学院・理学研究科・数学専攻，教授，理学博士，代数学
TEL 06－6850－5292
FAX 06－6850－5292
E-Mail kawanaka@math.sci.osaka-u.ac.jp

の若さで発表したのは1950年のことだが，これらの考え方が経済学における地位を確立したのは，比較的最近(1980年代以降)のことらしい．この功績により，1994年のノーベル経済学賞がナッシュに授与されている(２人の経済学者と共同受賞)．尚，ナッシュも「実代数幾何学」という純粋数学の新分野を独力で創始するというもう一つの大きな仕事を成し遂げており，一般の数学者の間では，むしろこちらの結果の方で有名であり，尊敬もされている．

フォン・ノイマン，モルゲンシュテルン，ナッシュのゲーム理論(以下，単にゲーム理論という)における「ゲーム」には勝ち負けのはっきりした通常の意味のゲームだけでなく，利害の異なる複数主体の間の「ゲーム的状況」，たとえば商取引や国際関係，あるいは何種類かの生物種による「進化ゲーム」なども含まれる．偶然が関与することもあるし，一部のプレイヤーたちが協調行動をとることもありうる．これら非常に広汎な状況において「行動の合理的選択」とは何かを，できるだけ一般的な立場から定式化しようというのが，このゲーム理論の目的である．現在では，合理的選択とはナッシュ均衡，またはその精密化にほかならない，ということになっている．ナッシュの定理は，かなり一般的なゲーム的状況において「ナッシュ均衡が存在する」ことを主張する．これもまた「存在定理」のひとつで，実際にどのような行動が合理的であるのかということについて定理自身は何も教えてはくれない．現実的な問題(経済学や生物進化など)においては，もともとすべての条件を数式化することは不可能である．そのためもあって，多くの場合は，問題を極端に単純化することにより，ナッシュ均衡を具体的に計算できる状況を，いわば人工的に作り出している．従って，ゲーム理論の応用といっても，従来，ことばを使ったレトリックで表現してきたものを，数式を使ったレトリックに置き換えただけ，のような印象がある．もちろん，これにより論理の客観性が，ある程度，保証されるという点は理解できる．ノーベル賞の研究を批評するなど，身の程知らずもいいところだが(自分の家の経済状態も分からぬ程の)経済音痴の筆者個人の，あるいはゲーム理論に対する数学者社会の，偏見がつい出てしまった．

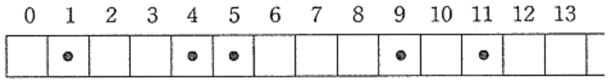
コンウェイのゲーム理論

コンウェイは英国ケンブリッジ大学出身の数学者で，現在は米国，プリンストン大学のフォン・ノイマン教授職に就いている．コンウェイ単純群の発見，モンスター群に関するムーンシャイン予想の提唱，結び目のコンウェイ不変量，球の詰め込み，コード理論，タイル貼り，生物進化のモデルといわれるライフ・ゲーム，……など，コンウェイによる多彩かつ超一流の業績群の中でも，一際，異彩を放つのが1970年代に建設された彼独自の「ゲーム理論」(以下「Ｃゲーム理論」と呼ぶ)である．「Ｃゲーム理論」におけるゲームとは，ツェルメロの定理が対象とするタイプのゲームである．ただし，簡単のため，引き分けはないものとする．このような種類のすべてのゲーム(これまでに考え出されたものだけでなく，今後，誰かが発明するゲームもすべて含む)ひとつひとつに対し，コンウェイはある「数」を対応させる．ここでいう「数」には実数だけでなく，様々な種類の無限大や無限小，さらには何とよんでよいのかわからぬ奇妙な「数」も含まれているので「コンウェイ数」とでも呼んでおこう．コンウェイ数では加法と減法ができる．少し範囲を狭くした「超現実数」(著名なコンピュータ科学者クヌースの命名)においては四則演算がすべてできる．もし，考えたいゲームに対応するコンウェイ数が計算できたなら，そのゲームの勝者が誰であるかが分かり，勝つための戦略についても詳しいことがわかる．従って，あるゲームの具体的解法について研究するには「それに対応するコンウェイ数，またはその『近似値』，を求めよ」というのが，Ｃゲーム理論が指し示すプログラムとなる．筆者は，Ｃゲーム理論を実に素晴らしいと思うのだが，残念なことに，一般の数学者には殆ど知られていない．フォン・ノイマン，ナッシュ，コンウェイ，……数学者が「ゲーム」を研究することは，よくよくの鬼門らしい．

佐藤のゲーム

実は，１年と少し前に，筆者もゲームに興味をもって「しまった」．筆者がひかれたのは，日本では「佐藤(幹夫)のゲーム」，海外では「ウェルターのゲーム」と呼ばれている非常に奇妙なゲームであった．奇妙とは言ってもゲームのルールそれ自体には奇妙なところは少しもなく，次のように表現できる．

『0，1，2，……と続くエネルギー順位のどこかに有限個の「粒子」が配置されているとする．ただし，



佐藤のゲーム
（粒子９は０、２、３、６、７、８へ移動可能）

基底状態

この粒子は「フェルミ粒子」であって同じエネルギー順位には２個以上の粒子は入れない．２人のプレイヤーは，交互にどれかひとつの粒子を選び，より低く，かつ空いているエネルギー順位へと移動させる．自分の番なのに，移動可能な粒子がないという状態(基底状態)になったプレイヤーを負け，基定状態にした方を勝ちとする．』

コンウェイと共著でＣゲーム理論の大きな本を書いたバーレカンプは，このゲームについて次のように論評している．「ウェルターのゲームの解法(筆者註：対応するコンウェイ数を与えられた粒子の配置から計算する公式のこと，コンウェイ理論成立以前の1950年頃に，佐藤とウェルターによって独立に発見された)は定理として述べることは簡単だが，証明するのは難しい．このゲームと解法を少しでも違う方向に拡張するのは，更に難しい．(自分で)解法を見つけるのは，まず不可能だ．もし，ウェルターが発見していなかったとしたら，今でも未発見のままだったに違いない．」(最後の文章はこの発言の時点で佐藤の研究が海外では知られていなかったことによる．)バーレカンプが自分には見つけられない，と言ったのは，佐藤のゲームの解法を与える公式が，それ以外のどの(解けている)ゲームの解法とも似ていない，奇妙な形をしているからである．筆者もこの点に心を引かれ，あれこれ考えてみたところ，幸運にも筆者の過去の(無関係に見えた)研究歴が役に立ち，佐藤のゲームとよく似た解法をもつ大量の新しいゲームを発見することができた．

与えられたゲームの解法を見つけたのではなく，「解けるゲーム」を新たに作ったのだから，なんだかずるいようにも見えるが，実はこれは数学の常套手段である．真っ暗闇の中でものを探すよりは，街灯を設置できそうな場所を選んで，街灯をつけていこう，という考え方である．無論，依然として街灯の光が届かないところは残るかもしれないが，これにより見える範囲が広がるだけでもよい，ということである．今回，新たにつけた「街灯」がどの程度の範囲を照らしてくれるのか，今，じっと観察しているところである．

岩波講座，現代数学の基礎，第34巻の「現代数学の広がり２」の第１章「佐藤幹夫の数学」に佐藤氏の広範囲に及ぶ業績の概要が紹介されており，佐藤のゲームについてもそこで読むことができる．

超現実数の見る夢，ゲームの見る夢

超現実数は「実数」というものに対する「ゲーム的見地」の産物である．今のところ，超現実数の唯一の応用は，ゲームの解析である．例えば，囲碁の終盤(ヨセ)の解析への応用がある．ただし，この事実によって囲碁界が震撼した，という話はまだ聞かない．筆者は，むしろゲーム界の外への応用がある筈だと信じている．もし，そうなれば「数学のゲームへの応用」ではなく，「ゲームの数学への応用」や「ゲームの科学への応用」が実現することになる．

「ゲーム」を扱う数学理論として，ある程度まとまったものは，今のところ，「ゲーム理論」と「Ｃゲーム理論」しかない．(しかも，後者は論文数からいうと，とてもまとまった分野とは言えないほど少ない．)しかし，よく考えてみると「ゲーム」というのは世界を見る上でのひとつの見方のことである．つまり，世界を，たとえば唯一神による，一人ゲームと見るか，それとも複数のプレイヤーによるゲームとみるか，という見方のことなのではないか．そのように考えると，従来の数学は一人ゲームの見地に片寄っていたように思えてくる．同じ現象でも一人ゲームと見るか，複数の主体によるゲームとみるかで，数学的表現が異なってくる(その最も良い例が超現実数)筈で，原則的にはどちらの見方も可能とすると，(複数主体の)ゲームの見地から，従来の数学，科学を見直せば，もっともっと多くの「ゲーム理論」が成立するに違いない．夢を夢だけに終わらせないためには，どこかから手をつけ始めなければいけないと考えている．