生産と技術　第53巻　第3号　(2001)

制御理論と双対性

太　田　快　人*

研究ノート

Control Theory and Duality

Key Words：制御理論，双対性，最適化問題，数理計画法
Control Theory, Duality, Optimization, Mathematical Prgramming

制御理論と双対性

双対性あるいは二重元性と訳されるduality(デュアリティ)は，日常的に用いられることばの意味としては，一つのことがらや事象の二面性のことである．ものごとのより深い理解のために，われわれは日常的に双対性を利用している．たとえば慎重な性格と優柔不断な性格は双対性が現れていると見れば，よりその人への理解が深まるというものである．一つの側面のみから早計な判断をして他の側面を見逃すことは，味のないことだと言えよう．

この小文では数理的意味をもつ単語としての双対性を考えている．しかし日常的な使い方と同様に，複数の側面からものごとを見ることによって，問題に対する理解を深めてくれる役目を果たしている．たとえば文献[1]の特集号にある解説は，様々な視点から数理的な双対性の意味を説いている．制御理論の分野では，双対性の利用は最適制御理論が展開した1960年ころから指摘されていたことである．たとえば成書[2]を参考にされたい．

ところで筆者は，制御理論と双対性の関わりに現代的な視点を取り込むことによって新しい知見を得ることに興味をもって研究している．ここでいう現代的な視点とは，ロバスト制御理論によるいくつかの基本的な考え方を取り込むことである．基本となる事項は，(i)ノルムの利用，(ii)達成される制御性能の厳密な評価，(iii)効率のよい計算方法，である．

ロバスト制御理論は，1970年代後半より始まった理論変革の一つの流れである．それ以前の制御設計のとの根本的な差について模式的にまとめてみたい．図1に従来の制御設計の概念図を示す．制御対象に補償器を接続して制御系を構成するとき，それがどのような制御性能を発揮するかは，順方向の解析となり(これを図中では矢印で表している)，比較的容易な問題である．これに対して制御系設計では，制御対象と制御性能が与えられたときに，その性能を達成する補償器を見つけることが問題となる．これは一般には順方向の解析に比べれば容易ではないが，制御対象のクラスや制御性能の取り方によっては補償器を求めることが可能である(教科書的な成果としてはLQ制御がある)．

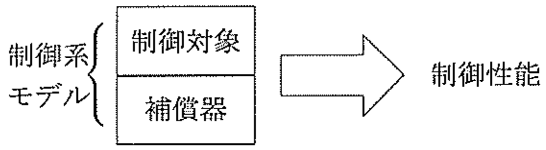
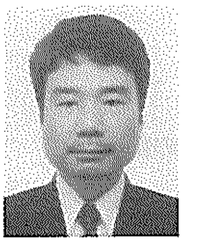


図1　従来の制御設計の概念図

上述の設計方針が成功するためには，制御系モデルの中にあるモデルとしての制御対象は実物としての制御対象の特性をよくつかんだものでなくてはならない．特性のいくつかは近似されることになるし，質量や長さなどのパラメータについても真値は知る由がない．ロバスト制御理論では，一つの制御対象を考えるのではなく，集合としての制御対象を考えることにある．図2にロバスト制御設計の概念図を示す．制御対象は広がりをもった集合(図では太い線分で表している)であり，好ましい制御性能(図では網掛けで表している)を達成するように補償器を



* Yoshito OHTA
1957年8月30日生
1982年大阪大学 大学院工学研究科
電子工学専攻 前期課程修了
現在，大阪大学・大学院工学研究科・
電子制御機械工学専攻，教授，工学
博士，制御工学
TEL 06－6879－7328
FAX 06－6879－7247
E-Mail ohta@mech.eng.osaka-u.ac.jp

探す．従来の設計は，制御対象と補償器の組(これは図２では一点に相当する)が制御性能を満たすようにすることであった．これに対して集合としての制御対象を扱うことで，それに含まれる制御対象については制御性能を保証することになるので，ロバストな制御が可能となる．代表的な方法にH無限大制御があるが，そこではH^{∞}ノルムとよばれるノルムの大きさを制御性能の指標にとることでロバスト制御の手法を与えている[3]．またH無限大制御は行列不等式に基づく効率のよい計算方法[4]と組み合わさることで広く応用されるようになった．

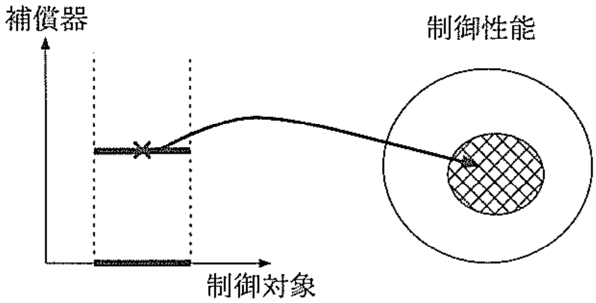


図２　ロバスト制御設計の概念図

制御性能にはH^{∞}ノルム以外にも，過渡応答が良好であること，周波数応答が良好で運動性能がよくかつ不安定現象の発生しないことなどの要求がある．これら多目的な制御仕様を同様に満たす制御系設計のためには，凸計画法が有効である[5]．

筆者は，時間領域の制御性能評価の指標としてインパルス応答のl_1ノルムを用いて多目的な制御仕様を満たす設計法に双対性を適用することを提案している[6,7]．これはl_1ノルムを評価関数(ノルム値が小さいほどすぐれた制御性能になっている)として，他の制御仕様を拘束条件とする最適化問題になる．適当な空間の上で定式化すれば，これは(補償器は無限の自由度があるので)無限次元空間の上での凸計画問題になる(これを主問題ということにする)．補償器の自由度を有限個に制約してこの問題を解き，その自由度の数を増加させる方法が考えられる．各段階において，最適解が求まるが，それらはもとの無限次元問題に対しては一般には最適ではない．さらに都合のよくないことは，いかほど最適値から離れているかがわからないので，自由度の数をどれだけ増やせば満足してよいのかの情報がない．

この解決策は双対問題を利用することである．双対問題を幾何学的に解決すると図３のようになる．凸計画問題の制約条件を満たす集合と評価関数値がr以下になる集合に交わりのないならば，明らかに凸計画問題の最適値はrを下回らない．これら二集合は凸計画問題なので(凹みのない)凸集合になる．交わりがないと図３のようにその間に分離超平面(平面での直線の概念を一般化したもの)が引けそうである．ここで分離超平面の引ける最大のrを探す問題が双対問題になる．

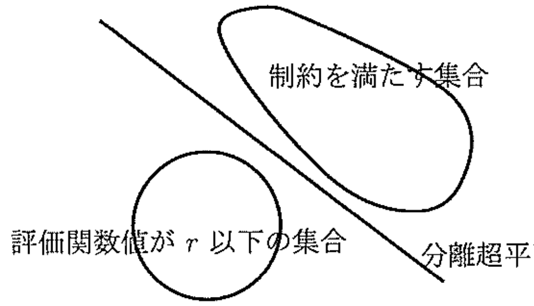


図３　双対問題と分離超平面

有限次元空間の場合は問題がないが，今考えている無限次元空間の場合には，どの範囲から分離超平面を選んでくるかが重要になる．分離超平面を探す範囲を狭くすると，二つの凸集合に交わりがなくとも分離超平面が引けなくなる．このとき主問題と双対問題の最適値は一致しなくなる(これを双対ギャップがあるという)ので，有限次元近似した主問題の解がどれほどよい解を与えているかの情報を与えることができない．一方，分離超平面を探す範囲を広げると，交わりのない限り分離超平面を引くことができるが，分離超平面を計算する問題自体を有限次元近似することが困難になる．実は，分離超平面を探す範囲を工夫することによって，双対ギャップがなくしかも有限次元近似できる双対問題を構成することができるのである[6,7]．図４に分離超平面とい

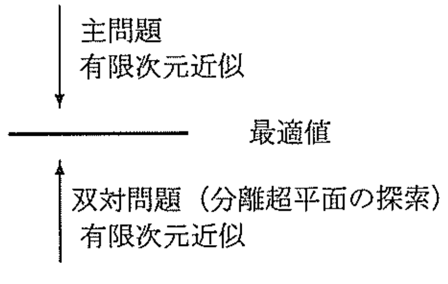


図４　主双対問題と有限次元近似

う考え方で双対性を生かした多目的制御問題への接近法の概念図を示す．最適値の探索を計算効率のよい有限次元の線形計画法によって上と下からはさむことによって達成可能な制御性能を厳密に求めることができる．

制御理論は関連分野との関わりの中でダイナミズムをもって展開している[8]．ここで紹介したことは，双対性を利用した最適化理論との関わりの中での研究方向の一端である．達成可能な制御性能を厳密に評価しながら効率的な計算をめざす基本姿勢を理解いただけたと思う．

参　考　文　献

[1] 数理科学「特集・双対性(デュアリティ)自然界に備わる対称性・二面性」, vol.38, no.2, 2000.

[2] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*, John-Wiley & Sons, 1969.

[3] 木村英紀, H^{∞}制御, コロナ社, 2000.

[4] 岩崎徹也, LMIと制御, 昭晃堂, 1997.

[5] S. P. Boyd and C. H. Barratt, *Linear Controller Design: Limits of Performance*, Prentice-Hall, 1991.

[6] 太田快人, 東出善之, "時間応答制約を含むl_1最適制御," 計測自動制御学会論文集, vol.37, 2001. 掲載予定.

[7] 太田快人, "周波数応答制約のあるl_1制御への双対定理の適用," 計測自動制御学会制御部門第1回部門大会, 2001.

[8] システム/制御/情報「システム制御理論の新領域特集号」, vol.45, no4, 2001.