リスク鋭感的確率最適制御の数理ファイナンスへの応用

研究ノート

長　井　英　生*

Application of risk-sensitive stochastic optimal control to mathematical finance

Key Words：risk-sensitive control, Bellman equation, porffolio optimization, factor model

1. はじめに

確率制御問題の数学的研究を長く続けるうち，ロバスト性との関連から，リスク鋭感的確率制御問題に行きつき，'90年代半ばからは，その研究に時間を費やした．'90年代末になって，数理ファイナンスの研究者としてよく知られる，S. PliskaとT. Bielecki[5]が，筆者のリスク鋭感的確率制御に関する論文([15])の結果をポートフォリオ最適化問題に応用したのをきっかけに，数理ファイナンスの研究に手を染めることになった．この問題の思わぬ発展に驚き，また楽しんでいる現況を報告したい．まずは，リスク鋭感的確率制御問題とはどういう問題なのかということから始めよう．

2. リスク鋭感的確率制御

まず，有限時間範囲(finite time horizon)での問題から始める．制御確率過程は通常の確率制御問題と同じように，制御確率微分方程式の解として定まる確率過程を考える．

$$(2.1)\quad dX_s = \sigma(X_s)dB_s + b(X_s, z_s)ds, \quad X_0 = x \in R^N,$$

B_tはブラウン運動であり，制御系の不規則な要因を表す．z_tは制御パラメータで，定められた制御領域に値をとるものとする．このように制御確率過程については，古典的な確率制御問題の場合と変わらない．これに対して，リスク鋭感的確率制御の評価関数は次のように特徴的な形をとる．

$$(2.2)\quad J(x; z.; T, \theta) = \frac{1}{\theta}\log E_x[\exp(\theta\int_0^T \Phi(X_s, z_s)ds)]$$

θはリスク鋭感的パラメータと呼ばれ，$\theta \neq 0$とする．問題は，制御z_tを定められた範囲で動かすことにより，制御確率過程X_tの汎関数として定まる(2.2)の評価関数Jを最小(大)にすることである．古典的な確率制御問題では，通常，評価関数は$E_x[\int_0^T \Phi(X_s, z_s)ds]$なるものを考えるが，上の場合との関係をみておこう．(2.2)において，$\theta \to 0$とした漸近展開を考えると

$$J(x; z.; T, \theta) \sim E_x[\int_0^T \Phi(X_s, z_s)ds)] + \frac{\theta}{2}\mathrm{Var}[\int_0^T \Phi(X_s, z_s)ds] + O(\theta^2)$$

となることがわかる．従ってJを最小化する問題は，$\theta > 0$で0に近い場合，近似的に，古典的な場合の費用汎関数(cost functional) $\int_0^T \Phi(X_s, z_s)ds$の期待値の最小化と同時に，その分散までも最小化する問題に相当する．たとえ，期待値を小さくしても，個々の場合には，その期待値から隔たった大きな実現値が得られるかも知れないことを恐れ，その危険を避けるために分散までも小さくしようとする制御主体の意向を反映する問題と言え，その意味でリスク回避(risk averse)の場合と呼ばれる．それに対して，$\theta < 0$の場合は逆に，費用汎関数$\int_0^T \Phi(X_s, z_s)ds$の期待値は小さくするが，その分散を大きくとろうとする問題となる．これは，分散が大きければ，その期待値から大きく隔たった小さな実現値が得られるかも知れない(実際には逆に大きく隔たった大きな実

* Hideo NAGAI
1950年4月25日生
昭和50年大阪大学理学研究科数学専攻修士課程修了
現在，大阪大学大学院・基礎工学研究科・情報数理系専攻・数理科学分野，教授，理学博士，確率論，確率制御理論
TEL　06－6850－6460
FAX　06－6850－6496
E-Mail nagai@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

現値を得る危険があるにもかかわらず）と考える楽観的な制御主体の意向を反映する問題と言え，その意味で，リスク志向(risk seeking)の場合と呼ばれる．まず値関数を導入する．

$$(2.3)\qquad v(t,x)=\inf_{z.} J(x;z.;T-t,\theta),\quad t<T$$

この値関数は古典的な場合と類似した議論により，ベルマン原理を通じて，形式的にベルマン方程式(Hamilton-Jacobi-Bellman equation)を満たすことが示されるがその方程式は次のように書ける．

$$(2.4)\qquad \begin{aligned}&\tfrac{\partial v}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j}a^{ij}(x)D_{ij}v+Q(x,\nabla v)=0,\\ &v(T,x)=0\end{aligned}$$

(2.5)

$$Q(x,p)=\frac{\theta}{2}\sum_{i,j}a^{ij}(x)p_ip_j+\inf_{z\in Z}\{\sum_i b^i(x,z)p_i+\Phi(x,z)\},$$

$a^{ij}=(\sigma\sigma^*)^{ij}$, $D_{ij}=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$．形式的な議論をするならば，(2.4)の解 v が与えられたとき，(2.5)で $p=\nabla v(t,x)$ としたときのinfを実現する $\hat{z}(t,x)$ を選ぶことができ，その $\hat{z}$ に対して，(2.1)の確率微分方程式

(2.1)′

$$dX_s=\sigma(X_s)dB_s+b(X_s,\hat{z}(s,X_s))ds,\quad X_0=x\in R^N,$$

が解をもつならば，その解から決まる，$\hat{z}_s=\hat{z}(s,X_s)$ が最適制御で，$J(x;\hat{z}.;T,\theta)\leq J(x;z.;T,\theta)$，$\forall z.$ というわけである．ただ，上のことが数学的に厳密に証明されるのは限られた場合だけである．

さて，工学上重要な，H_∞ 制御との関連で興味がもたれているのは，リスク回避の場合である．関数 $\Phi(x,z)$ としてはしばしば $\Phi(x,z)\to\infty$, $x,z\to\infty$ なるものを考える（典型的な場合は x と z の２次関数）ため，リスク回避的，$\theta>0$ の場合，評価関数(2.2)は必ずしも有限の値をとるとは限らない．どんな制御をとっても発散してしまうことさえ起こりうる．このことを崩壊(break down)と呼ぶ．基本的な問題として，まず，崩壊が起こらないような θ の範囲を定めることがある．これには解析的な問題として，ベルマン方程式(2.4)の可解性の問題が対応する．すなわち，(2.4)が解をもつならば，そのような θ に対して確率制御問題は非崩壊であることは一般的な設定で言える．しかしながら，(2.4)は１階の導関数に関する２次の非線形項をもち，解析的な取り扱いが困難な方程式として知られており，その可解性を正面から問題にして取り扱った仕事は多くない([1],[3],[15],[13])．直観的には，制御確率微分方程式の安定性を良くする $b(x,z)$ の働きと，評価関数の発散の度合いを決める $\Phi(x,z)$ の増大度との関係で(2.4)の解が存在するような θ の範囲が定まるということである．このような様相は古典的な場合と異なる．古典的な場合は $\Phi(x,z)$ が多項式程度の増大度をもったとしても，ベルマン方程式は一般化解の意味では一般的に解が存在する．問題はその解の滑らかさの程度とされる．崩壊のような状況は問題とならない．

さて，非線形 H_∞ 制御との関係を考えるには，パラメーター ε をとり σ を $\sqrt{\varepsilon}\sigma$ に，θ を $\frac{\theta}{\varepsilon}$ に置き換えて問題を考え，非崩壊であるような θ に対してその特異極限として得られる，方程式

$$(2.6)\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+Q(x,\nabla v)=0,\quad v(T,x)=0$$

を導き，対応する微分ゲームが非線形 H_∞ 制御に対するゲーム論的接近となるものであることを見ることになる．この特異極限の考察には80年代に生まれた粘性解の方法が有力な武器となる．([1],[2],[6],[10])．リスク鋭感的パラメータ θ の大きさは，H_∞ 制御において，ロバスト性の程度を表す，外乱除去レベルと対応する．典型的な場合は線形 H_∞ 制御に対応するLEQG(linear Exponential Quardratic Gaussian)制御で，外乱除去レベル $\gamma=\frac{1}{2\theta}$ となっている．

上では有限時間範囲に話を限ったが，無限時間範囲(infinite time horizon)の問題を考えることは，応用を考える上で計算量の観点から重要とされ，数学的にも興味深い問題を生み出している．すなわち，(2.2)のかわりに，

$$J(x;z.;\theta)=\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T\theta}\log E_x[\exp(\theta\int_0^T\Phi(X_s,z_s)ds)]$$

なる評価関数を考え，その最小値を特徴付けるベルマン方程式を考察するわけであり，それはエルゴード型ベルマン方程式とよばれるものである．その方程式の導出は解析的には，フレドホルムの交代定理の非線形版という意味をもっており，また確率論的

には，Donsker-Varadhan型の大偏差原理に関連する興味深い問題である．さらに，その解の特異極限を考察することにより，定常Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs方程式を導き，その解を微分ゲームと関連付けることが上と同様に問題となる([7], [12], [13])．この際，特別な場合に限定すると，この特異極限は数理物理で問題となる，準古典近似の問題と類似の問題となっているという興味深い事実もある([8], [9], [12], [13], [11], [19])．まるで，動機を異にするところから生じた問題が，数学的にみると同じ問題に行き着くというわけである．

ここではすべて，完全可観測の場合に限って話を進めたが，部分可観測の場合にも多くの研究が試みられている．しかしながら，完全可観測の場合と比べると，必ずしも十分な成功が得られているとは言えない状況と思われる．

不確実な現象下での制御問題を，確率制御問題として定式化する際，ロバスト性の問題が必然的に生起し，それを数学的に捉えようと，リスク鋭感的確率制御にゆきついた．この考え方は，同じく不確実な現象下の最適化問題として，数理ファイナンスにおける問題にも影響を及ぼしてきている．それについて次に述べよう．

3．数理ファイナンスへの応用

次のようなファクターモデルを考える．$m+1$個の有価証券(securities)があるとする．これは，国債，各種債券，株等の原証券，だけでなく派生証券も含むとする．そのうちの一つは安全債券であり，その価格$S^0(t)$は方程式

$$(3.1)\qquad dS^0(t)=r(t)S^0(t)dt,\quad S^0(0)=s^0,$$

に従っているものとする．ここで$r(t)$はランダムでないものとする．他の有価証券の価格$S^i(t)$は確率微分方程式

(3.2)
$$dS^i(t)=S^i(t)\{(a+AX_t)^i dt+\textstyle\sum_{k=1}^{n+m}\sigma_k^i dW_t^k\},$$
$$S^i(0)=s^i,\quad i=1,...,m$$

に従っているものとする．ここで，$W(t)=(W^k(t))_{k=1,2,..,m+n}$は$m+n$次元ブラウン運動であり，$a$は定数ベクトル$A$, σ_k^iは定数行列である．$A=0$のときは，Black-Scholesモデルのいわゆる幾何ブラウン運動と呼ばれるものである．X_tはファクターと呼ばれるもので，株の配当や，短(長)期金利，やインフレーション率，といった経済的な要因であり，次の確率微分方程式に従う確率過程であるとする．

$$(3.3)\quad dX_t=(b+BX_t)dt+\Lambda dW_t,\quad X(0)=x\in R^n,$$

ここでも，bは定数ベクトル，B,Λは定数行列とする．実務家が，有価証券の収益を予想するにあたって，しばしば経済的な要因を利用するが，それを数学的にモデル化した，Bielecki-Pliskaの定式化に従っている．すなわち，Black-Scholesモデルにおいては，瞬間的な期待収益率を意味する係数の部分が，経済的な要因X_tの一次関数で決まるようなモデルに修正されたものである．このとき，投資家が，時刻tにおいて$m+1$個の有価証券$S^0(t), S^1(t), ..., S^m(t)$をそれぞれ，$h^0(t), h^1(t), ..., h^m(t)$だけ(比率として，従って$\Sigma_{i=0}^m h^i=1$)保有することにより(ポートフォリオを組むことにより)，保持することになる資産の額のダイナミックスは

(3.4)
$$\frac{dV_t}{V_t}=r(t)dt+h(t)^*(a+AX_t-r(t)\mathbf{1})dt+h(t)^*\Sigma dW_t,$$

と書ける．ここで$\Sigma=(\sigma_{ij})$, $\mathbf{1}=(1,1,...,1)^*$であり，$h(t)=(h^1(t), h^2(t), ...,, h^m(t))^*$とする．問題はこの投資家の保有する資産の成長率を最大化することであるが，その問題にロバスト性を考慮にいれた，リスク鋭感化問題(risk-sensitized problem)すなわち，

$$(3.5)\qquad J(v,x;h;T)=-\frac{2}{\theta}\log E[e^{-\frac{\theta}{2}\log V_T(h)}],$$

を最大にするポートフォリオを求める問題を考察する．すなわち，$\log V_T(h)$はポートフォリオhを選択したとき，時刻Tまでの資産の成長率を意味するが，単にその期待値を考えるのではなく，リスク鋭感的パラメータθを導入して(3.5)を最大化することを考える．ここで，まず，$h(t)$は，すべての有価証券，とそのファクターの過去の情報をすべて使って選択できる範囲で最良のポートフォリオを組むことを考える．この問題は実は，上で考えたリスク鋭感的確率制御問題の特別な場合とみなせる．確率測度Pをずれの変換により(cf.[17])

$$\hat{P}(A) = E[e^{-\frac{\theta}{2}\int_0^T h_s^* \Sigma dW_s - \frac{1}{2}(\frac{\theta}{2})^2 \int_0^T h_s^* \Sigma\Sigma^* h_s ds}; A]$$

に変換するとき，この$\hat{P}$の下で$\hat{W}_t = W_t + \frac{\theta}{2}\int_0^t \Sigma^* h(s)ds$はブラウン運動となり，ファクター$X_t$は

$$dX_s = (b + BX_s - \frac{\theta}{2}\Lambda\Sigma^* h(s))ds + \Lambda d\hat{W}_s$$

と書き表される．すなわち，ファクターは，ポートフォリオ$h(\cdot)$を制御であると考えた制御確率過程とみなせる．そして，Tを$T-t$として，(3.5)を最大化することは

$$u(t,x) = \sup_{h(\cdot)}\{-\frac{2}{\theta}\log \hat{E}[v^{-\frac{\theta}{2}} e^{\int_0^{T-t} \frac{\theta}{2}\Phi(X_s, h_s, r(s);\theta)ds}]\}$$

を考察することになる．ここで，$\Phi(x, h, r; \theta) = \frac{1}{2}(\frac{\theta}{2}+1)h^* \Sigma\Sigma^* h - r - h^*(a + Ax - r\mathbf{1})$．従って，(2.4)を導くのと同様にして，そのベルマン方程式は

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}(\Lambda\Lambda^*)^{ij} D_{ij} u \\
&\quad + \inf_{h \in R^m}\{(b + Bx - \frac{\theta}{2}\Lambda\Sigma^* h)^* Du + \frac{\theta}{2}\Phi(x, h; r)u\} \\
&\quad = 0, \quad (t,x) \in [0,T) \times R^n \\
&v(T,x) = v^{-\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

となることがわかる．この場合，その解uは$u(t, x) = \frac{1}{2}x^* P(t)x + g(t)^* x + \frac{1}{2}k(t)$, $0 \le t \le T$なる表現をもつことがわかる．ここで，$P(t)$はある行列リッカチ方程式の解であり，$g(t)$はこの$P(t)$に対して定まるある微分方程式の解，さらに，$k(t)$は$P(t)$, $g(t)$から決まるものである．(3.5)の最適ポートフォリオ$\hat{h}_t$は具体的に

$$\hat{h}_t = \frac{2(\Sigma\Sigma^*)^{-1}}{\theta+2}\{a + AX_t - r(t)\mathbf{1} - \frac{\theta}{2}\Sigma\Lambda^*(P(t)X_t + g(t))\}$$

と求まり，そのときの値関数(期待最適成長率)は

$$J(v, x; \hat{h}; T) = \frac{1}{2}x^* P(0)x + g(0)^* x + k(0)$$

と計算される．

上では，ポートフォリオを選択するに際し，有価証券とファクターのすべての過去の情報を使って組むことができるとしたが，投資する有価証券の過去の情報は調べても，ファクターとなる経済的要因の過去のすべての情報を用いることは必ずしも現実的ではないと考えられるから，有価証券の過去の情報のみを用いてポートフォリオを組むことを考える．このとき，上で考えた(完全可観測)リスク鋭感的確率制御はフィルターの関わる部分可観測リスク鋭感的確率制御問題となる．この場合，最適ポートフォリオは２本のリッカチ方程式を解くことによって具体的に求められることがわかる．そこでの議論は，KalmanによるLQG理論をLEQGへと発展させたBensoussan - Van Schuppen[4]の仕事と類似するが，違いは，現在の問題の場合，システムノイズと観測ノイズが相関をもつこと，そして，費用汎関数が確率積分を含むことである．(cf. [16], [18])

上記はともに有限時間範囲の問題であるが，ここでも，無限時間範囲で問題を考察することは，応用上も理論的にも興味深く，数学的に新たな問題を生み出している．上記のような，簡単化したモデルにおいては，行列リッカチ微分方程式の解の大域的な性質に関する問題として考察され，かなりな部分，解明されたといってよい．(cf. [14], [18])

4．終わりに

非線形H_∞制御に対する確率制御からのアプローチとして研究されてきたリスク鋭感的確率制御の手法が，数理ファイナンスの興味深い問題に適用されることを見た．制御工学における有力な制御手法とされているH_∞制御と，金融工学・数理ファイナンスにおける，ポートフォリオ最適化の問題を一つの視野におさめる，数学的立場からの報告である．

5．参考文献

1) A. Bensoussan, J. Frehse and H. Nagai, *Applied Mathematics and Optimization*, Vol.37 (1998) 1-41
2) A. Bensoussan and H. Nagai, *SIAM J. Control and Optim.*, vol.35 (1997) 1093-1115
3) A. Bensoussan and H. Nagai, *Applied Mathematics and Optimization*, 42 (2000) 91-101.
4) A. Bensoussan and J.H. Van Schuppen, *SIAM J. Cont. Optim.* vol.23 (1985) 599-613
5) T.R. Bielecki and S.R. Pliska, *Appl. Math. Optim.* vol.39 (1999) 337-360
6) W.H. Fleming and W.M. McEneaney, *Lecture Note in Control and Inform. Sci.*, vol.184

(1992) 185-197
7) W.H. Fleming and W.M. McEneaney, *SIAM J. Control and Optimization*, Vol.33, No.6 (1995) 1881-1915
8) W.H. Fleming and S. J. Sheu, *Annals of Probability*, 25 (1997) 1953-1994
9) H. Ishii, H. Nagai and F. Teramoto, *Proceeding of the 7th Japan-Russia Symp. on Prob. and Math. Stat.*, World Scientific (1996) 164-173.
10) M.R. James, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol.5 (1992) 401-417
11) G. Jona-Lasinio, F. Martinelli, and E. Scoppola, Comm. Math. Phys., vol.80, pp.223-254, 1981
12) H. Kaise and H. Nagai, *Asymptotic Analysis* 16 (1998) 347-362
13) H. Kaise and H. Nagai, *Asymptotic Analysis* 20 (1999) 279-299
14) K. Kuroda and H. Nagai, A volume in honour of Professor Alain Bensoussan's 60-th Birthday, Eds. J.L. Ménaldi et al.,IOS press (2001) 530-538
15) H. Nagai, *SIAM J. Control and Optimization*, Vol.34, No.1 (1996) 74-101.
16) H. Nagai, A volume in honor of G. Kallianpur on the occasion of his 75-th birthday, Birkhäuser, 321-340 (2000)
17) 長井英生,「確率微分方程式」共立出版 (1999)
18) H. Nagai and S. Peng, to appear in Annals of Appl. Probability
19) B. Simon, Ann. Inst. Henri Poincaré, section A, vol.38, pp.297-307, 1983