量子推定理論における最近の話題

研究ノート

藤　原　彰　夫*

Recent topics in quantum estimation theory

Key Words: quantum information theory, quantum channel, entanglement, Fisher information

近年，量子コンピュータが実現すれば大きな整数の素因数分解が現実的な時間で可能となるので，RSA暗号に代表される現在の暗号システムは安全でないとか，そんな時代が来ても，量子暗号という究極の暗号システムがあるから大丈夫であるとか，量子力学的な原理に基づく情報システムが巷を賑わしている．本稿では，量子情報理論の一分野である量子推定理論における最近の話題から，特に量子通信路の統計的推定問題について紹介しようと思う．

1．量子通信路の同定問題

着目する物理系を表現するヒルベルト空間を$\mathcal{H}$とし，$\mathcal{H}$上の量子状態(密度作用素)全体を$S(\mathcal{H})$とする．物理系の力学的変化(量子通信路)$\Gamma : S(\mathcal{H}) \to S(\mathcal{H})$は，数学的にはトレースを保存する完全正写像というもので表現されることは良く知られている．しかし，実験室にある未知の量子通信路を実験的に同定するにはどうすればよいだろうか？　一般的な方法としては，素性の良く分かった量子状態σを通信路に入力し，出てきた量子状態$\Gamma(\sigma)$に対して何らかの測定を施すことにより，力学的変化$\sigma \mapsto \Gamma(\sigma)$を推定することになろう．この場合,「最適な推定方法は何か」という点が当然のことながら問題となる．この問題に対し，量子推定理論の観点からアプローチするのが，量子通信路の統計的推定問題である．

* Akio FUJIWARA
1960年11月27日生
1993年東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻修了
現在，大阪大学・大学院理学研究科・数学専攻，助教授，工学博士，数理工学
TEL　06－6850－5721
FAX　06－6850－5713
E-Mail fujiwara@math.wani.osaka-u.ac.jp

簡単のため，推定すべき量子通信路Γは，ある有限次元のパラメータθを持つ族$\{\Gamma_\theta\}_\theta$に属していると仮定する．(この仮定は，$\mathcal{H}$が有限次元の場合には本質的ではない．)即ち，あるパラメータ値θに対して$\Gamma=\Gamma_\theta$となっている状況を想定し，真のパラメータ値θを推定しようというわけである．

さて，量子通信路へ入力する状態σをとりあえず固定すると，可能な出力状態全体は，θをパラメータに持つ量子状態の族$\{\Gamma_\theta(\sigma)\}_\theta$をなすので，量子通信路を推定する問題は，出力状態の族$\{\Gamma_\theta(\sigma)\}_\theta$に対するパラメータ推定問題に帰着される．これは従来の量子推定理論の範疇に属する問題である．量子通信路の推定問題が従来の推定問題と異なる第1の点は，出力状態族$\{\Gamma_\theta(\sigma)\}_\theta$のパラメータ$\theta$に対する推定方式の最適化のみならず，入力状態$\sigma$をも最適化しなければならないという2重の最適化構造にある．しかし，これはあまり本質的な違いではないとも言える．

真に本質的な違いは次の点にある．量子通信路Γ_θは数学的には完全正写像で表現されるので，複数の量子系を結合させた拡大量子系，例えば$\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$上に自然に拡張できる．パラメータ推定理論の観点からは，特に次の2つの拡張が重要である．一つは$\Gamma_\theta\otimes \mathrm{Id} : S(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}) \to S(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$，(ここにIdは恒等写像)，もう一つは$\Gamma_\theta\otimes\Gamma_\theta : S(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}) \to S(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$である．このように定義域を拡張する時，アインシュタイン・ポドルスキー・ローゼンのパラドクスで有名な，いわゆる非局所的量子相関を表すエンタングルド状態を入力したら何が起るか，という興味が湧いてくる．以下では，この問題の非自明な側面を，簡単な例を用いて説明しようと思う．

2．デポーラリゼーション通信路

$\mathcal{H}\cong\mathbb{C}^2$とし，量子通信路$\Gamma_\theta : S(\mathcal{H}) \to S(\mathcal{H})$

$$\Gamma_\theta\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+z & x-iy\\ x+iy & 1-z\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+\theta z & \theta(x-iy)\\ \theta(x+iy) & 1-\theta z\end{bmatrix}$$

で定義する．ここに，(x, y, z)はいわゆる量子２準位系のストークス・パラメータである．また，パラメータθはデポーラリゼーションの強さを表す１次元パラメータであり，Γ_θの完全正値性により，θは$-1/3\leq\theta\leq 1$の範囲を動く．

まず初めは素朴に，拡大量子系を用いず，$S(\mathcal{H})$の元σを入力状態とする戦略について考えてみよう．この場合，出力状態族$\{\Gamma_\theta(\sigma)\}_\theta$の量子フィッシャー情報量を最大にするような入力$\sigma$を探せば良く，凸性の議論から，$\sigma$として(任意の)純粋状態をとれば良いことが分かる．対応する最大量子フィッシャー情報量は

$$J_\theta=\frac{1}{1-\theta^2}$$

となる．

次に，２次拡大量子系$\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$を考えることにする．そして，拡張通信路として，まずは$\Gamma_\theta\otimes \mathrm{Id}: S(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})\to S(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$について考察しよう．再び凸性の議論により，最適入力状態は純粋状態であることが分かるので，それを$\hat{\sigma}=|\psi\rangle\langle\psi|$と書くことにする．ここに$\psi$は$\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$の単位ベクトルであり，$\mathcal{H}=\mathbb{C}^2$のある２つの正規直交基底$\{e_1, e_2\}$, $\{f_1, f_2\}$および$0\leq x\leq 1$を満たす実数xを用いて

$$\psi=\sqrt{1-x}\,e_1\otimes f_1+\sqrt{x}\,e_2\otimes f_2$$

と表しておく．物理的にはxはエンタングルの度合いを表すパラメータである．特に，$x=0$または１のときは，状態はテンソル積に分解される．これは，独立な信号を２回，通信路に入力するという状況に対応する．また，$x=1/2$に対応する状態(最大エンタングルド状態)では，量子論的非局在性の効果が最も大きくなる．さて，入力$\hat{\sigma}$に対応する出力状態族$\{\Gamma_\theta\otimes\mathrm{Id}(\hat{\sigma})\}_\theta$の量子フィッシャー情報量は

$$\hat{J}_\theta=\frac{1+3\theta+8x(1-x)}{(1-\theta^2)(1+3\theta)}$$

となる．$x=0$または１のとき，$\hat{J}_\theta$はJ_θに一致する．これは，入力状態にエンタングルがないので(すなわち独立な入力信号を用いているので)，パラメータθに関する情報が，Γ_θとは独立した通信路Idを介しては何も得られないという当然の事実を表している．量子フィッシャー情報量$\hat{J}_\theta$が最大となるのは$x=1/2$の時，即ちエンタングルが最大となった時であり，これがパラメータθを推定する上で最適な入力を与える．この事実は，入力としてエンタングルド状態を用いることにより，通信路Γ_θに関する情報が，それとは全く独立な通信路Idを介して，より多く得られることを意味している．いうなれば，地球で行われた実験に関する情報を，そんな実験のことなど知る由もない160万光年離れた別の銀河の住人からこっそり教えてもらった，と主張するようなものであり，古典力学的にはあり得ない，極めて深遠な現象である．

最後に，拡張通信路$\Gamma_\theta\otimes\Gamma_\theta: S(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})\to S(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$を考えよう．この場合の量子フィッシャー情報量は

$$\check{J}_\theta=\frac{4\theta^4+5\theta^2-1}{2\theta^2(1-\theta^4)}+\frac{8\theta^2x(1-x)}{1-\theta^4}+\frac{1-\theta^2}{2\theta^2(1+\theta^2)[1-\theta^2+16\theta^2x(1-x)]}$$

と，やや複雑な式になる．まず，$x=0$または１のとき，$\check{J}_\theta$はJ_θのちょうど２倍となる．これも，通信路Γ_θを独立に２回使い，しかも入力として独立信号を２回使っているのだから，当然のことである．次に，量子フィッシャー情報量$\check{J}_\theta$を最大にするxを求めると，$1/\sqrt{3}\leq\theta\leq 1$のときは$x=1/2$，また$-1/3\leq\theta\leq 1/\sqrt{3}$のときは$x=0,1$となる．この事実は，最適な入力が，$\theta=1/\sqrt{3}$を境にして，最大エンタングルド状態からテンソル積状態へと，いわば「相転移」することを意味している．一見するとパラメータに関し一様なデポーラリゼーション通信路の族が，このような相転移に似た挙動を示すのは，かなり意外なことと言えよう．

このように，デポーラリゼーション通信路という極めて基本的かつ単純な通信路に対する推定問題でさえ，これほど非自明な様相を内包しているのである．

3．おわりに

本稿では，量子推定理論における最近の話題の中から特に量子通信路の統計的推定問題を選び，簡単な例題を通じて，その興味深い側面を紹介してみた．量子推定理論に興味を持たれた方は，文献[1][2][3]

を参照して頂きたい．また，上に述べた量子通信路の統計的推定問題の詳しい解析は，文献[4]に与えられている．

参　考　文　献

1) C.W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory* (Academic Press, New York, 1976).
2) A.S.Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1982).
3) 藤原彰夫：量子推定理論入門（未発表原稿）.
4) A. Fujiwara, "Quantum channel identification problem", Phys. Rev. A 63, 042304 (2001).