拘束系の力学とロコモーション

研究ノート

石　川　将　人*

On constrained mechanics and locomotion

Key Words：constrained mechanics, nonholonomic systems, mechanical locomotion

1　拘束る（しばる）

拘束という言葉は，一般にはネガティブなイメージをもって受け止められることが多い．国語辞典を繙けば，「捕らえて行動の自由を奪う」「行動や判断の自由を制限する」などの定義が並ぶ．束縛，制約，restriction，constraintなどの同義語も同様である．その背後には，拘束されない状態，つまり「自由」が理想的な状態であるという認識があることはいうまでもない．しかし見方によっては，自由というのはまことにつまらない状態である．たとえばチェスにおいてすべての駒がクイーンであったなら，面白かろうはずがない．ルービックキューブのピースがすべて自由に入れ替えられるものなら，手に取る者はいないであろう．適切な拘束が課せられているからこそ，それを掻い潜るべくさまざまな工夫の余地が生まれ，ものごとが深く面白くなるのだといえよう．

筆者はこれまで，機械システムにおける「拘束」の面白さに惹かれ，これと正面から向き合うことでさまざまな研究テーマを見出してきた．そもそも機械とは，相対運動を拘束された要素の集まりのことであるから，機械力学とはすなわち拘束系の力学であるといっても過言ではない．拘束があれば，それを破らぬような振る舞いがおのずと決まる．機械における拘束は脇役ではなく主役であって，その機械の振る舞いを規定する個性そのものといえる．

筆者が特に着目してきたのは非ホロノミック拘束系である．ホロノミック，非ホロノミックとは力学的拘束の分類に使われる言葉であって，一般化座標$\boldsymbol{q}$のみを含む代数等式$\gamma(\boldsymbol{q}) = 0$の形で表される拘束をホロノミックといい，そうでないものを総称して非ホロノミック拘束という [1]．「そうでないもの」ではあまりに広すぎて議論の対象としては具体性を欠くが，典型的なサブクラスとしては一般化速度を含む拘束（運動学的拘束）$\gamma(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0$や加速度を含む拘束（動力学的拘束），不等式拘束$\gamma(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \cdots) \geq 0$などが挙げられる．運動学的拘束には転がり接触や運動量保存に起因するもの，動力学的拘束には非駆動関節（フリージョイント）に起因するもの，不等式拘束には衝突に起因するものなどが含まれる．

Fig. 1の左図はいわゆる剛体リンク拘束の例である．一般化座標を$\boldsymbol{q} = (x, y)^T$とおけば，拘束$\gamma(\boldsymbol{q}) = x^2 + y^2 = \text{const.}$が働く．これはホロノミック拘束であって，拘束条件の数だけ一般化座標の数を減退して$\tilde{\boldsymbol{q}} = \theta$と還元することができる．一方，同図右のような横滑りをしない平面車両の場合は，一般化座標$\boldsymbol{q} = (x, y, \theta)^T$とおけば運動学的拘束$\gamma(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0$が働く．これは非ホロノミック拘束である．

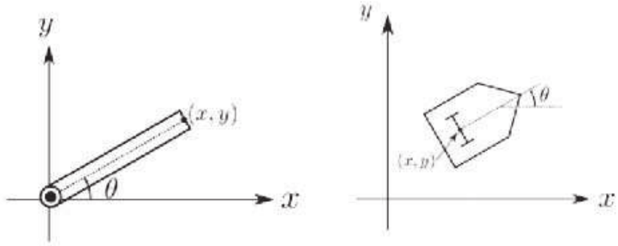

Fig. 1　Holonomic and nonholonomic constraints

ここで注意すべきことは，見かけ上$\boldsymbol{q}$を含む形

* Masato ISHIKAWA
1972年3月生
東京工業大学　大学院情報理工学研究科
情報環境学専攻博士後期課程（2000年）
現在、大阪大学　大学院工学研究科機械工学専攻　教授　博士（工学）
非ホロノミック拘束系，移動体の力学，非線形制御
TEL：06-6879-4723
FAX：06-6879-4878
E-mail：ishikawa@mech.eng.osaka-u.ac.jp

で表された拘束であっても，変換によってホロノミック拘束に書き直せる可能性が残っていることである．たとえば先の$x^2+y^2=\mathrm{const.}$を形式的に時間微分して得たものがそうで，要するに何か別の拘束条件の微分になっているものを可積分という．また，そうでないときは不可積分（すなわち真に非ホロノミック）であるという．運動学的拘束の可積分性は1階偏微分方程式の可解性の問題に帰着され，その条件はPoincareの補題やFrobeniusの定理といった多様体論の基本定理によって記述される．加速度を含む拘束の場合は可積分であるためには2階の積分を経る必要がある．また，拘束条件の微分はいつでも行えるのに対して可積分な拘束は上記条件を満たすものに限られるが，この構図はde Rhamコホモロジーといった微分位相幾何学の枠組みと深くつながっており，基本的な力学問題ながら豊かな数理的バックグラウンドに支えられたトピックである．

2　制御る（あやつる）

さて，冒頭で拘束と対置されるものは自由であると述べた．n次元の配位空間をもつシステムに$r(<n)$個の運動学的拘束条件が課されたならば，残る自由度はその余次元$n-r$となる（特異点の考慮はここでは措く）．拘束系をあやつるとは，この残った自由度を適切な制御入力として用いることで所望の運動を実現することである．すなわち制御とは自由度の選択にほかならず，この意味で「拘束」と「制御」は表裏一体の関係にあるといえる．実際，進んではならない方向を表す「拘束」を配位多様体上の外微分形式，進んでよい方向を表す「制御」を接ベクトル場として表すと，その理論体系の多くの部分は数学的に双対な形になる．

たとえば先に挙げた拘束条件の可積分性の問題は，拘束に着目して外微分形式を用いれば外微分代数の条件の形で表される一方，制御に着目して接ベクトル場を用いて表すこともできる．多様体上の全ての接ベクトル場の集合はLie括弧積を演算としてn個の基底を持つLie代数（多重線形・反対称・非結合的な代数）を生成するが，接ベクトル場のうち許容されるものだけ選んだ部分集合は同じ演算で部分Lie代数を生成し，その基底の数n_cは$r\leq n_c\leq n$である．$n_c=r$のとき完全可積分，$n_c=n$のとき完全不可積分，そうでなければ部分的に可積分という．完全不可積分であれば，任意の初期状態から任意の目標状態へ，許容された入力だけを用いて必ず到達できることが保証され，このとき系は可制御であるという．瞬間的な自由度がrであっても，進むべき方向を時々刻々で適切に選択すれば，結果的にn次元空間を自由に動き回れるというわけである．

上記の解析の興味深い点は，拘束が可積分か不可積分かという二択の結論が得られるだけではなく，瞬間的なr自由度から大域的なn自由度がいかにして獲得されるかという，操作のための「レシピ」が部分Lie代数の構造からわかることである．Lie代数の階数構造を示す指標にgrowthベクトルというものがあるが，Fig.1 右で示した車両系は入力自由度が2で，1階のLie括弧積で1自由度増える（growth-(2,3)）という構造を持ち，非ホロノミック系の中で最も単純な例である．筆者はさらに深く進んで，2階の括弧積が主役を演じるgrowth-(2,3,5) 系や三すくみの構造をもつgrowth-(3,6) といった高階・多入力の代数系の性質と状態遷移のメカニズムを明らかにし，目標の状態まで到達させるさまざまなリアルタイム操作アルゴリズムを構築するに至った．これによって，複雑なLie代数構造をもつ系を操るための基礎理論ができあがったが，同時に，このような系をあえて実体化することでさまざまな機構を創出することも可能である．これについて次節で述べる．

3　移動く（うごく）

移動体の力学，すなわちロコモーションの問題は，拘束系の力学を考えるうえで格好の題材である．そもそも物体が自律的に移動するためには，慣性系に対して何らかの働きかけをして反力を得なければならない．平面移動の場合は，脚や車輪を床に接触させて拘束力を得，それを何らかの方法で所望の方向の推進力に変換するというのが基本的なメカニズムである．

Fig. 2に示すヘビ型移動体はその例である．能動関節でつながれた索状リンク系があり，各リンクには横滑りをしない受動車輪が取り付けられている．剛体リンクによるホロノミック拘束と車輪による非ホロノミック拘束が混在した系である．この系が可制御になるための最小構成は3リンク（2関節）であるが，対応する部分Lie代数を解析するとgrowth-(2,3,5) の構造をもつことがわかり，前述し

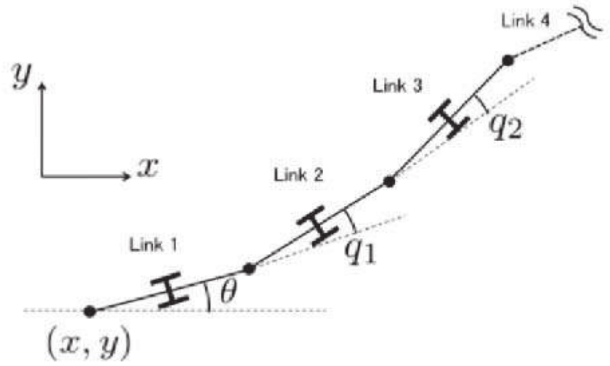

Fig. 2　Snake-like locomotor

た操作アルゴリズムによって任意の位置・姿勢への移動が可能になることを文献 [2] にて示した．

さて，筆者はこのように現実のモデルを抽象化して代数の問題に帰着し，しばらく代数の世界で「遊んで」いるうちに，そこで得た知見を現実の世界に出現させることを着想した．筆者は前述した growth-(3,6) の系について理論的な解析を進めていたが，当初はこの系に対応する平面移動体の実例は知られていなかった．そこで growth-(2,3,5) 系とヘビ型移動体との対応を参考に実体化を検討したところ，Fig. 3 に示すような「三叉ヘビ」とよばれる移動体の構造を思いついた．ヘビ型移動体が生物のヘビを模倣・抽象化するところから考案されたのに対して，三叉ヘビは純粋に理論的な着想から生み出されたもので，実在の生物に由来しないにも関わらずどこか生物のような不思議な動きを見せてくれる．さらに，再び growth-(2,3,5) の系に立ち戻り，これが平面上で滑らずに転がる球体の振る舞いと共通の構造を持つことに着目した結果，Fig. 4 に示す揺動三脚歩行機 [3] の創出にもつながった．これらの経緯の詳細については文献 [4] などを参照されたい．

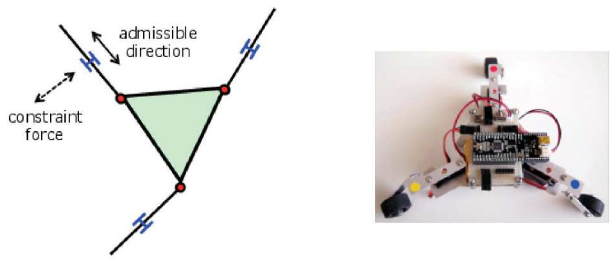

Fig. 3　Trident snake

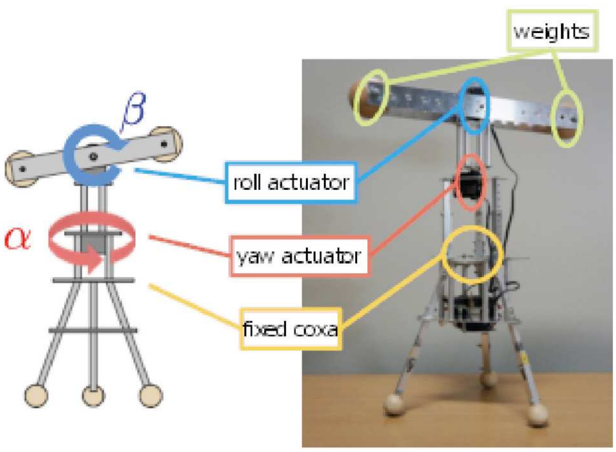

Fig. 4　Martian II: the triped walker

４　おわりに

本稿では拘束系とロコモーションの力学にまつわる問題の諸相と，筆者のこれまでの取り組みの一部を概説した．ここで述べきれなかった詳細については [5] とその引用文献などを参照いただければ幸いである．末筆ながら本稿執筆の機会をいただいた生産と技術編集部各位に厚く感謝を申し上げる．

参考文献

[1] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3rd edition, 2002.

[2] M. Ishikawa. Iterative feedback control of snake-like robot based on principal fiber bundle modeling. *International Journal of Advanced Mechatronic Systems*, Vol. 1, No. 1, 2008.

[3] M. Ishikawa, T. Kato, Y. Sugimoto, K. Osuka, and Y. Sankai. Tripedal walking robot with fixed coxa driven by periodic rocking. In *IEEE/RSJ Int'l. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, pp. 163-168, 2012.

[4] 石川．生物に学ばない移動メカニズムー control oriented locomotion ー．システム／制御／情報，Vol. 53, No. 12, pp. 524-529, 2009.

[5] 石川．非ホロノミックシステムの制御ー拘束条件の非線形性を活かすー．日本ロボット学会誌，Vol. 27, No. 4, pp. 384-387, 2009.