転、停止或いは熱出力の制御に用うるもので、結局、原子炉中の中性子をこの Control Rod で吸収させ Rod を原子炉中へ挿入する程度によつてその吸収量を変えて制御するのである、この為には中性子吸収率の大きな物質でなくてはならない、現在用いられているものは B や Cd が用いられて居る、Control Rod は炉の温度が上昇し過ぎたり、何か事故が発生した場合、重力を利用して炉の中に落ち込む様にしてある。Emergency Control と原子炉中の核反応の程度を適当に調節する為電力、水圧又は人力で動かせる様になつたものとある。

1952年12月12日に大きな故障を起し多量の放射性物質を流出させその修理に莫大な労力と経費を要したカナダの Chalk River の原子炉 (NRX) は恐らく Control の装置の故障によるものと思われる。この原子炉の修理に関しては Chemical Engineering Progress 1954年5月号 Vol, 50 No. 5 にくわしく掲載されているが、それに要した費用は数億ドルに達し、建設費の4倍も多くかかつたのである。

(ホ) 原子炉に用いられる各種物質の問題

原子炉附属の色々な測定計器の導線の絶縁物は炉の中の中性子の照射、その他の放射線の為に犯され絶縁が悪くなり、人造樹脂はもろくなり、ガラスは不透明になり遂に自然に破壊して了う非常に強い放射線により今迄想像もつかなかつた問題が生じて来た。此の事に関する研究は米国アイダホにある MTR (Materials Testing Reactor) 原子炉で行われて居る。この原子炉はこの研究の為に建設されたもので特に炉内の中性子の密度が他の原子炉より高くなる様に設計してある。

(ヘ) 放射線の遮閉の問題

これに関しては後に放射性同位元素のところで述べるが、原子炉建設費の中、この遮閉の占める割合は相当な値に達する。

以上炉の構造に関する説明を終り、これより現在如何にして原子力発電が行われて居るかを実際の炉に関して述べてゆきたいと思う。 (次号につづく)

【講座の2】

近代統計学覗見

[1]

阪大理学部 小川潤次郎

はしがき

編輯部の方から原稿用紙120枚程で近代統計学について何か書けと云われて、さて考えて見ると仲々良いプランがない。講座風にと云うても初等統計学の入門書は現今誠に汗手充棟の感があるし(1)、かく云う筆者も最近そのような書物を書いて(2)、その厄介さに閉口したばかりであつて、今またそれに類したことをやるのもあまりに芸がなさすぎる。

それで表題の如く、覗見を試みることにした。内容は3部に分つて次のようにする。

第1部 変量分析の理論と実際

第2部 線型推定子の理論

—最小自乗法の現代語版—

第3部 統計教育について

第1部では近代統計学的方法として、現今最も広く使われている分散分析及び共分散分析を実例について、少しく詳細に説明したものである。そしてこのようなテクニツクの基礎となる推定子は所謂最小自乗推定子であつて、もつと一般な線型推定子という類であるので、第2部では、その現代的な理論の大略を紹介する、この位で近代統計学の大切なところが覗けたかどうか頗る疑問ではあるが、紙数の都合もあるので、具体的な話はそれ位にする。

次に近代統計学の日本の社会における今日の地位というのは、今から約19年程前即ち1940年頃の米国におけるそれと、或意味では極似していると思われる。それは統計の声は徒らに巷にのみ囂しく、権威ある綜合大学等の所謂アカデミズムでは何等然るべき対策をしていない、米国の数理統計学会の〃統計教育に関する委員会〃がこのような状態に対して発表した(3) 報告書があるので、第3部ではその概要を紹介しつゝ統計学宣伝の為に少しくハタリをかけることにする。

さてこのような内容で果して筆者に芸があつたかどうかは只読者の評価にまつのみである。

註(1)必ずしも皆筆者に知られているとは限らない、少くとも筆者の知つている範囲では次のような書物は推賞し得る。

1. Paul G. Hoel; Introductin to mathomatical statistics. 1954 John Wiley (これの旧版は日本語訳がある

が新版の方が段違いに良くなつている）

2. Kenneth Mather : Statiotical analysis in biology Metheuon BooK Comp （近く日本訳が朝倉書店から出版される予定、これは生物学に対する応用の仕方が中心であるが、ユニークな本である著者 Mather は遺伝学者でリンケーヂ、ポリヂーンの理論で有名であるがそれは近代統計の方法によつて初めて出来たのであつた）

註(2)近代数理統計学序説1954東文堂

註(3) Report of The Comittee on Teaching Statistics of The institute of Mathematical Statistics A. M. S. **19** (1948)

第1部　変量分析の理論と實際

変量分析とか共変量分析とか呼ばれる統計的方法は現今では非常に普及していて、いやしくも統計的方法を用いる程の人なら何人でもこれらは使つている程である。今更これを解説することは無用の術かも知れないが、その理論面は必ずしも完成されているわけではないので、この解説を書いて見ることにする。

本稿で実例として用いる第1表は W. G. Cochran and G. M. Cox 共著：Experimental Design (John Wiley 1950) の第40頁、第3.1表を借用したものである。

このデーターは1935年にロザムステツト農事試験場 (Rothamsted Experimental Station) で行われた4種類の土壌殺虫剤を用いたときのミミズの数である。

クロロ・デ・ニトロベンゼン	CN
2硫化炭素のゼリー――	CS
シ　マ　グ (Cymag)	CM
ス イ ケ ー (Seekay)	CK

Cymag Seekay はロザムステツト農事試験場の特製剤らしいがその内容はよく判らない。

試験に供された**処理** (Treatment) は上記4剤の各1容量――これを 1CN, 1CS, 1CM, 1CK で表わす――と各2容量――これを2CN, 2CS, 2CM, 2CK で表わす――の8種と**対照** (Control) として全然殺虫剤を用いない場合――これを0で表わす――の合計の種類であつた。

配置方法は**ブロツク数**を4とし、各ブロツク内の**ブロツト数**は12と10又は特に4回反復するものとし、割当て方法は所謂**乱塊法** (Randomized block method) を用いたものである。

殺虫剤は春の間に圃場に梳き込まれるのであるが、その時各プロツトから400瓦の土壌を無作為に取つて、その中のミミズの数を調べた。そのデーターが第1表上段の数字である。この圃場に大麦を蒔いて、秋になつて刈込みが終つたとき、春と同じ様に各プロツトから400瓦の土壌を無作為に取つて、その中のミミズの数を調べたデーターが第1表下段の数字である。表の両側に記入してある数字は春と秋とのミミズの数のブロツク和である。

表 1 表　殺虫剤試験におけるミミズの数

O 269 466	2CK 283 280	1CN 262 398	1CM 212 386
1CS 138 194	O 100 219	O 197 421	2CM 263 379
2CS 282 372	1CK 230 256	O 216 708	2CN 145 304

第1ブロツク
2587
4383

2CM 95 199	2CS 127 166	2CK 80 142	O 134 590
1CK 107 236	1CN 89 332	1CM 41 176	O 74 137
O 88 356	O 25 212	2CN 42 308	1CS 62 221

第2ブロツク
964
3075

1CK 124 268	O 211 505	1CS 194 433	2CK 222 408
O 102 363	2CN 193 561	2CS 128 311	1CN 42 222
2CM 162 365	O 191 563	1CM 107 415	O 67 338

第3ブロツク
1743
4752

2CK 193 292	O 209 352	1CK 109 132	1CM 153 454
O 29 254	2CN 9 92	2CS 17 28	O 19 106
1CS 23 80	1CN 19 114	O 44 208	2CM 48 298

第4ブロツク
872
2470

吾々の問題はこれら4種類の殺虫剤の効果についての知識を求めることである。

その為には先ず乱塊法から考察せねばならない。乱塊法の数学的定式化としては J. Neyman[(1)] によるものが筆者の知る限りでは最も自然のようである。

第j番目のブロツクの第k番目のプロツトを簡単に (j.k) プロツトと呼ぶことにしよう。

(j. k) プロツトに処理iを斉一な条件の下で無限回施したときに得られるであろう。収量の母集団の母平均を (j. k) プロツトにおける i 処理の**真の収量** (True yield という、これを今 ξ_{ijk} で表わす。(j. k) プロフトに i) 処理が実際に施こされて得られる実測収量を y_{ijk} とするとき

$$\varepsilon^{1}_{ijk}=y_{ijk}-\xi_{ijk} \tag{1}$$

を吾々は J. Neyman に従つて**技術誤差** (Technical error) と名づける。技術誤差は云わば観測誤差のようなものだから、これは平均O. 共通分散 U^2 の互に独立な

註(1) J. Neyman, K.Iwaszkiewicz and Sp. Kotodziejzcyk : Statistical problems in agricultural erperimentation. J. R. S. S. Supp. Vol. 11, No2 (1935)

偶然量と考えることは一応自然であろう。

今ブロック数を b, 各ブロック内のプロット数を p として i 処理の全体として反復回数を ri とする。

$$\xi_{i}=\frac{1}{p}\sum_{k}\xi_{ijk},\ \xi_{i..}=\frac{1}{b}\sum_{j}\xi_{ij.}=\frac{1}{bp}\sum_{j}\sum_{k}\xi_{ijk} \quad (2)$$

とおくと恒等式

$$\xi_{ijk}=\tau_{i}+\beta_{ij}+\eta_{ijk} \quad (3)$$

$$\tau_{i}=\xi_{i..},\beta_{ij}=\xi_{ij.}-\xi_{i..},\eta_{ijk}=\xi_{ijk}-\xi_{ij.} \quad (4)$$

が成立つ。(1)と(2)から

$$y_{ijk}=\tau_{i}+\beta_{ij}+\eta_{ijk}+\varepsilon^{1}_{ijk} \quad (5)$$

となる。よつて実測收量y_{ijk}は互に独立で、夫々

$$N(\tau_{i}+\beta_{ij}+\eta_{ijk},O^{-2})$$

に従う偶然量となるわけである。今 i 処理を受けた(j.k)プロットについて実測收量の平均をとるならば

$$y_{i..}=\frac{1}{ri}\Sigma_{(i)}y_{ijk} \quad (6)$$

だから(5)を用いて

$$E(y_{i..})=\tau_{i}+\frac{1}{ri}\Sigma_{(i)}\eta_{ijk} \quad (7)$$

となる。今二つの処理 i, i′ についてその効果の差$\Delta(i.i')=\tau_{i}-\tau_{i'}$ を調べる為に標平均の差 $y_{i..}-y_{i'..}$ を取つたとすれば、(7)により

$$E(y_{i..}-y_{i'..})=\tau_{i}-\tau_{i'}+\frac{1}{ri}\Sigma_{i}\eta_{ijk}-\frac{1}{ri'}\Sigma_{(i)'}\eta_{i'jk}$$

となつて**偏り** (Bias) をもつことになる。勿論すべての i. j. k について $\Sigma_{(i)}\eta_{ijk}=O$, 又は更に $\eta_{ijk}=O$ なら $y_{i..}$ は τ_{i} の**不偏推定値** (Unbiased estimate) となるが圃場試験のような場合にはこのような事情が成立つ(近似的にでも)と考えることは乱暴に過ぎる。從つて、$\frac{1}{ri}\Sigma_{(i)}\eta_{ijk}$は i 処理に対する**土壌誤差** (Soil error)である。

亂塊法の目的は実験の過程中に実験者が積極的にランダムネスを導入することによつて、上記の土壌誤差に基ずく偏りを消去しようというのである。即ちブロック内のプロットに処理を割当てるのに無作為にする。j ブロックで話をすれば、各処理に対応する確率変数 $Y_{1j}, Y_{2j}, \cdots Y_{pj}$ を考えて、すべての i. k に対して技術誤差 ε^{1}_{ijk} を固定したとき、それらと独立に

$$P(Y_{1j}=\tau_{1}+\beta_{1j}+\eta_{1jk_{1}}+\varepsilon^{1}_{1jk_{1}},\cdots Y_{pj}=\tau_{p}+\beta_{pj}+\eta_{pjkp}+\varepsilon^{1}_{pjkp})=1/P^{1} \quad (8)$$

となるのであるから今度は j ブロックの收量の分布は**混合正規型** (Compound normal type) で

$$\frac{(2\pi\sigma^{2})-b/2}{p^{1}}\sum_{(k1\cdots kp)}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{2}}\sum_{i=1}^{p}(Y_{ij}-\tau_{i}-\beta_{ij}-\eta_{ijki})^{2}\right]dY_{1j}\cdots dY_{pj}{}^{(2)} \quad (9)$$

となる。よつて

$$E(Y_{ij})=\frac{1}{p^{1}}\sum_{(k1\cdots kp)}(\tau_{i}+\beta_{ij}+\eta_{ijki}=\tau_{i}+\beta_{ij} \quad (10)$$

となるから (6)に対しては確かに

$$E(y_{i..})=\tau_{i} \quad (11)$$

となつて $y_{i..}$ は τ_{i} の不偏推定値となる。

併しこのように考えると標本に対して、母分布としては (9) をとらねばならないので、分散分析のときに問題になる統計量の標本分布は複雑になつて了うので正確な取扱いは筆者の知る限りでは未だなされていない様である。(9) を用いて ($Y_{1j}, \cdots Y_{pj}$) の相関を計算して、そのような2次積率をもつ正規分布を近似として用いる場合は文献に見えている。[3]

普通に及いられる分散分析法の基づく原理は所謂〃**回帰分析**〃 (Regression analysis) であつて、上記のモデルでは $\beta_{ij}\equiv\beta_{j}$ (i に無関係) で$\eta_{ijk}=O$ の場合に相当する。これでは折角の Randomization も全く無視されることになつて了つて、甚だつまらないのである。しかしこれを救う有効な方法は今のところ見受けられないようである。

これ丈のことを注意した上で例1に対する普通の分散分析及び共変量分析のやり方を説明し、最後に回帰分析の一般論を解説する、回帰分析というのは昔の**最小自乗法** (Method of the least square) の現代版のことである。

吾々の用いるモデルは

$$y_{ijk}=\tau_{i}+\beta_{j}+\varepsilon_{ijk}$$

であるが $\tau_{i}.\beta_{j}$ の平均を夫々 $\tau.\ \beta.$ として $\tau_{i}-\tau$ $\beta_{j}-\beta.$ を改めて $\tau_{i}.\ \beta_{j}$ と考えれば結局

$$y_{ijk}=\mu+\tau_{i}+\beta_{j}+\varepsilon_{ijk}$$

$$\sum_{i}\tau_{i}=\sum_{j}\beta_{j}=O \quad (12)$$

となる。μを**一般平均** (General mean) τ_{i} を**処理効果** (Treatment effect) 、β_{j} を**プロツク効果** (Bleck effect) と呼ぶことにする。

吾々の当面する第1表のデーターでは $b=4$, $p=12$, $r_{1}=r_{2}=\cdots=r_{8}=4$, $r_{9}=16$ であり、又(12)の修件は

註(2)小川潤次郎：乱塊法についての反省：日本統計学会年報 (1952)

(3) M. D. Mc Carthy: On the application of the z-test-to randomized blocks, Ann, Math, Stat., Vol 10 (1939.) p. 337

(4) A. Wald; Notes on "The Efficient Design" of experimental investogations. Columbia Lecture. (1946.)

$$\tau_1+\cdots+\tau_8+4\tau_9=0,\quad \beta_1+\beta_2-\beta_3+\beta_4=0 \qquad (13)$$

となる。従つてこの場合独立な未知母数の数は

$1+8+3=12$

である。これら未知母数の**最大推定値**――この場合にはこれは**最小自乗推定値**である――を夫々

$$\mu=m,\ \tau_1=t_1\cdots\tau_8=t_8\ \beta_1=b_1,\ \beta_2=b_2,\ \beta_3=b_3$$

とすれば(13)より τ_9, β_4 の推定値は

$$\tau_9=t_9=-\tfrac{1}{4}(t_1+\cdots+t_8)$$

$$\beta_4=b_4=-(b_1+b_2+b_3)$$

となる。それらは今

$$S=\sum_i\sum_j\sum_k(y_{ijk}-\mu-\beta_i-\beta_j)^2 \qquad (14)$$

とおくと所謂**正規方程式** (Normal equation)

$$-\tfrac{1}{2}\frac{2S}{2\mu}\Bigg|_{\substack{\mu=m\\ \tau_i=t_i\\ \beta_j=b_j}}=0,\quad -\tfrac{1}{2}\frac{2S}{2\tau_i}\Bigg|_{\substack{\mu=m\\ \tau_i=t_i\\ \beta_j=b_j}}=0,\quad i=1,2\cdots8.$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{2S}{2\beta_j}\Bigg|_{\substack{\mu=m\\ \tau_i=t_i\\ \beta_j=b_j}}=0 \quad j=1,2,3 \qquad (15)$$

から求められる。

こゝで次のような記号を用いる。先ず

$$G=\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk} \qquad (16)$$

を**総和** (Grand total) といゝ

$$T_i=\sum_{j=1}^{4}y_{ijk},\ i=1,\cdots8,\ T_9=\sum_{j=1}^{4}\sum_{k}{}_{(9)}y_{9ik} \qquad (17)$$

を**処理和** (Treatment total) という、更に又

$$B_j=\sum_{i=1}^{8}y_{ijk}+\sum_k y_{9jk}\quad j=1,2,3,4 \qquad (18)$$

を**ブロツク和** (Block total) という。

処理和、ブロツク和は夫々第2表及び第3表の如くである。ブロツク和は第1表の両側に附記したものを再録する迄である。

第2表 処理和 (秋)

処理 / レベル	CN	CS	CM	CK	計
0					5858
1	1066	928	1431	892	4317
2	1265	877	1241	1122	4505

G=14680

第3表 ブロツク和

	1	2	3	4	計
秋	4383	3075	4752	2470	14680
春	2587	964	7742	872	12165

さて (15) から直に判るように

$$\left.\begin{aligned} &m=G/48\\ &t_1=T_1/4-m,\cdots t_8=T_8/4-m,\ t_9=T_9/16-m\\ &b_1=B_1/12-m,\ b_2=B_2/12-m,\\ &\qquad b_3=B_3/12-m,\ b_4=B_4/12-m \end{aligned}\right\}(19)$$

で且つ又

$$\text{総平方和}=\sum_i\sum_j\sum_k y^2_{ijk}=48m^2+4(t_1^2+\cdots+t_8^2)$$

$$+16t_9^2+12(b_1^2+\cdots+b_4^2)+\sum_i\sum_j\sum_k(y_{ijk}-m-t_i-b_j)^2 \qquad (20)$$

(19) を用いて (20) を書直して

$$\sum_i\sum_j\sum_k y^2_{ijk}=\frac{G^2}{48}+\frac{T_1^2+\cdots+T_8^2}{4}+\frac{T_9^2}{16}-\frac{G^2}{48}$$

$$+\frac{B_1^2+\cdots+B_4^2}{12}-\frac{G^2}{48}+\sum_i\sum_j\sum_k(y_{ijk}-m-t_i-b_j)^2 \qquad (21)$$

これが此問題に対する分散分析の基本関係式で、$\sum_i\sum_j\sum_k(y_{ijk}-m-t_i-b_j)^2$ を**残差平方和** (Residual sum of squares) という。 (次号につゞく)

☆ 大倉電氣の記録調節計 ☆

大倉電気KKの電子管式多点記録調節 (警報) 計は多年の経験による権威的製品として知られてゐるがその主なる特長を挙げると次の通りである。

A. 多点制御 (ON-OFF又は3位式) 計器で6点までのプロセスを1台の計器でそれぞれ自動調節するものでその構成は打点式多点記録計の位置選別警報回路(設定自由)と入力回路切替スイツチと連動するセレクタースイツチ及びリレーよりなる信号継続回路自動復帰回路を構成してその目的を簡単に達した。

B. 打点間隔は30秒、15秒、特殊。

C. 制御方式は全て同一設定点に制御する場合はON-OFF又は三位式制御が出来る。又二つのブロツクに分かれて二組の設定点に制御する場合にはON-OFF制御が出来る。

D. 調節信号を各プロセスにフイードバツクさせずに警報ランプ盤、ブザー等を動作させれば多点警報装置となる、勿論警報と制御を組合せることも差支え