自己重力流体方程式の解の複雑な挙動

研究ノート

山　本　吉　孝*

Complex behavior in solutions of the equations of self-gravitating fluids

Key Words：Self-gravitating fluids, Equilibrium, Stability, Asymptotic behavior, Singularity

自己重力流体と宇宙流体力学

はじめに、タイトルに掲げた自己重力流体とその関連分野について説明しておきます。地球上で大気や海洋の流れを考えるにあたって、地球の重力による影響を考慮すべき場面が多々あることは言うまでもありませんが、大気や海洋を構成する物質の質量によって生じる重力場、さらにはこの重力場を介した物質間の作用が問題となることは、筆者が知る限り、ほとんどないといってよいでしょう。ところが、地球上の流れから宇宙空間における星間ガスの流れへと目を移すと、ガスの質量分布にしたがって生じる重力（ガスの自己重力）が無視できない存在となります。このことは流れに関与する質量が太陽質量（およそ、2×10 の 33 乗 g）と比較しても膨大であることからも想像に難くないでしょう。ここで星間ガスに対して「流れ」という用語を使いましたが、極めて希薄な星間ガスを地球上の流体と同等に扱ってよいかどうかはもちろん議論を要します。詳細は専門書[1]に譲りますが、星間ガスに関わる多くの現象において、ガスの力学的時間と比較してガスの粒子どうしの衝突時間が十分に短いものと考えられており、局所熱平衡の成立のもと連続体近似が可能であることが知られています。このような視点にたって自己重力流体の挙動の研究を通して星間ガスに関わる現象の解明にあたることが、今日、宇宙流体力学として確立された分野において重要な柱のひとつではないか、と（数学解析が専門の）筆者は理解しています。

自己重力流体のモデル方程式

宇宙流体力学の文献をひもとくと、自己重力流体の流れのモデル方程式として必ずといってもよいほど、Euler-Poisson 方程式系が挙げられています。星間ガスは 一般に、圧縮性が高く、密度が大きく変動し得る気体と想定されていますから、磁気流体現象や相対論的現象を扱わない限り、気体の運動の基礎方程式のひとつである（圧縮性）Euler 方程式によって流れを、重力場に密度の変動が反映されるよう Newton の重力則にしたがう Poisson 方程式によって自己重力を、それぞれ記述し、両者を組み合わせてモデル方程式とするのは理にかなった考えです。例えば、星の内部構造の古典的なモデルとして文献でよく取り上げられる Lane-Emden 方程式は、自己重力流体の球対称的な静止平衡状態における質量分布を Euler-Poisson 方程式系をもとに記述した方程式で、その解の振る舞いは数学解析の立場からもすでに多くの研究がなされています。

Lane-Emden 方程式をはじめとする Euler-Poisson 方程式系の扱いは、孤立した自己重力流体の挙動を対象としたものと考えられます。筆者が関心を寄せているのは、これとは異なり、例えば、均質に分布する流体に入射した擾乱によって自己重力を介した流体の集団的運動が誘導され、その結果、流れや流体の質量分布に特徴的なパターンが生じるかどうか、といった一種の自己組織化のプロセスです。この方向での研究は、天文物理学において天体形成の契機とされる様々な重力不安定の研究と密接に関連しており、当該分野ではすでにいくつかのシナリオが用意されています。筆者は、モデル方程式の解の全体

* Yoshitaka YAMAMOTO
1963年9月生まれ
京都大学大学院　理学研究科　数学専攻
博士後期課程単位取得満期退学（1993年）
現在、大阪大学大学院　情報科学研究科
情報数理学専攻　准教授　博士（理学）
専門／偏微分方程式論
TEL：06-6879-7866
FAX：06-6879-7836
E-mail：yamamoto@ist.osaka-u.ac.jp

像を明らかにすることで、これらシナリオの成否も含めて、自己重力流体がとり得る様々な挙動を描き出すことを目標に研究に取り組んできました。

以上、目標だけは高く掲げたつもりですが、例えばEuler-Poisson方程式系そのものの解析に見るべき進展があったのか、と尋ねられますと、ひとつには数学解析の技術的な問題、さらには方程式の本質に関わる（少なくとも筆者にとっては）未知の問題に行く手を阻まれて思いどおりには、と答えざるをえません。そこで応急処置として、次のように方程式の簡略化と（望ましくはありませんが、問題の本質が失われないと思われる最小限の）修正を行うことで解析を進めることにしました。

(a) 流れを空間１次元的周期流に限る。

方程式を簡略化して扱う際の常套手段ですが、意義を強調するとすれば、均質に分布する流体に平面波状の擾乱が入射した状況を想定してのモデル解析といえます。

(b) 周期的な質量分布に対してPoisson方程式にしたがう重力場を短距離的ポテンシャル場の極限で意味づける。

重力場の表現に現れる発散積分に意味を与えるための処理と考えていただければよろしいですが、処理の結果として得られる方程式は、流体が均質に分布する平衡解を許容し、流体の重力不安定に纏わるいくつかの問題を考えるうえで好都合なモデルとなります。

(c) 粘性項を付加する。

方程式の解の長時間挙動を考えるためには、まず、解が時間大域的に存在することを保証しなければなりません。Euler方程式の解の多くは、初期条件が滑らかに与えられていても有限時間内に不連続性を含む特異性を生じることが知られています。特異性を許容する弱解という概念もありますが、弱解を時間大域的に得るためには、(a)にいう簡略化された方程式に対してでさえ初期条件に関する様々な制約下で解の探索範囲を絞り込まざるを得ないのが現状です。Euler-Poisson方程式系に対しても同様の困難が待ちかまえているものと考えられます。これとは対照的に、(a)の簡略化のもとではありますが、粘性項を付加した方程式に対しては、粘性項の大きさによらず、初期条件に対する最小限の制約下で一意的に時間大域解が得られます。

以下、これらの「工夫」のもと、ガスの圧力が密度の冪乗(冪指数はポリトロープ指数と呼ばれます)に比例するポリトロピック流の方程式に対して得られた結果[3)4)]を紹介しましょう。

平衡とその安定性、漸近挙動、特異性

流体の平衡密度は運動の定数（保存量）です。これを分岐パラメータとして、平衡解は均質な平衡解から分かれ出る分岐解として系統的にすべて求められます。流体の自己重力の場のエネルギーを含めた一種のエネルギーを導入すると、（非平衡）解の軌道に沿ってこのエネルギーが減少することが示されます。これをもとに、各平衡解の安定性を明らかにすることができました。

解の漸近挙動はポリトロープ指数に大きく依存します。ガスの圧力が密度の比例する、いわゆる等温流の方程式の場合、解の有界性に関する決定的な結果[2)]を援用することで、解軌道はいずれも平衡に近づいていくことが示されます。等温流以外の場合については十分な結果が得られていませんが、ポリトロープ指数が１と２の間の場合、解軌道がガスの密度が至るところ正の平衡に近づいていくか、または、密度の下限が限りなく小さくなっていくか、の二者択一となることまでは判明しています。平衡解の安定性と平衡解の全体構造を照らし合わせると、後者は決して稀なケースではないという証拠が得られます。真空領域を含む特異な状態に接近する可能性も含めて解の漸近挙動を考える必要に迫られているのが現状です。

今後の展望

自己重力流体のモデル方程式の解が示す意外にも複雑な挙動に翻弄され、半ば絶望的な気分に襲われつつも、その都度、気を取り直して研究を続けてきました。現在、手をひろげて、流体の温度分布を考慮した方程式系の解析にあたっています。目のつけどころは、まずは平衡とその安定性、つぎに質量集中などの特異性へと解を誘うメカニズムの有無ではないか、との目論見で研究を進めています。

参考文献

1)　福江純・和田桂一・梅村雅之：宇宙流体力学の基礎，日本評論社 (2014)

2) A. Matsumura and T. Nishida,, Periodic solutions of a viscous gas equation, in "Recent Topics in Nonlinear PDE V", Lecture Notes in Numerical and Applied Analysis, Vol. 10, pp.49-82 (1989)
3) M. Sawada and Y. Yamamoto, Existence of unbounded solutions to a one dimensional isentropic periodic flow of a compressible viscous fluid with self-gravitation, Scienticae Mathematicae Japonicae, Vol. 80, pp.247-268 (2017)
4) 山本吉孝：気体の一次元流モデル方程式に対するジーンズ不安定性，これからの非線型偏微分方程式，日本評論社，第５章，pp.106-132 (2007)