

エルゴード理論から光学現象の数理モデリングまで ～極端現象の研究に通じる個人的なお話～



研究ノート

中川 正基*

From Ergodic Theory to Mathematical Modeling for Optical Phenomena:
A Personal Story Leading to the Research on Extreme Event

Key Words : Ergodic theory, Mathematical biology, Communication protocol,
FRET network, Extreme event

1. はじめに

筆者の研究の原点は、統計力学の基礎づけを背景とするカオス・エルゴード理論です。紆余曲折あり、数理生物学や通信分野に携わり、ここ暫くは光学現象の数理モデリングとその情報処理への応用の研究に携わっています。今後は上記に加えて、再びカオス・エルゴード理論界隈の「極端現象」の研究に取り組むことになりました。本稿では、筆者のこれまでの研究について時系列順に概観し、それらの経験が一つに融合する形で実現した極端現象の研究について説明致します。

2. カオス・エルゴード理論の研究

エルゴード理論は統計力学の基礎づけを起源とします。現在では物理の問題に拘泥せず、広い意味の力学系を確率論に基づき研究する数学の一分野に発展しています。エルゴード理論の目的を端的に言うと、力学系のエルゴード性を調べることで、さらにその統計的性質を調べることです。ここでエルゴード性とは、力学の代表点が描く相空間上の軌道が可能な領域のほとんど全てを隈なく巡る性質のことです。

筆者の最初の研究では、一次元写像力学系である「無限峰写像」の統計的性質を調べました。そして、あるクラスの無限峰写像 (ant-lion 写像) の新奇な

エルゴード特性を明らかにしました [1]。この力学系の特徴は、カオスの生成メカニズムである「引き伸ばし」と「折りたたみ」の無限の階層構造にあります。このように聞くと、非常に複雑なカオス的挙動が生成されると考えられますが、実際は、引き伸ばしと折りたたみが集積する特異点に軌道は速やかに収束します。一方で、ある種のカオス性も有しており、例えば、カオス性の判定に広く用いられるリャプノフ指数を、この軌道に対して計算すると無限大に発散します。この相反する特性の共存はそれまで知られていなかったのもので ant-lion 性と名付けました。これらの結果は数値実験と理論的考察から導いたもので、数学的には多くの謎が残されており、依然として研究の余地が残されています。

新奇なエルゴード特性の発見もありましたが、実は最も注目すべき成果は、無限峰写像に対する素朴かつ強力な解析手法「ランダム化の方法」の開発です。これにより、無限峰写像を、比較的扱いが容易なランダム力学系 (ある種の確率過程) に変換することができます。筆者の次の研究では、上述のランダム化の方法を活用し、オンオフ間欠性時系列を生成する無限峰写像モデルを提案しました [2]。提案した無限峰写像にランダム化の方法を適用したところ、従来のオンオフ間欠性モデルでは扱えない範囲を扱えることがわかりました。なぜランダム化の方法がうまく行くのか十分には解明できていませんが、多くの数値実験と理論的考察の結果、トールス上の速い変数に対して「一様分布仮設」が広く成り立つことが数学的背景にあることがわかっています [3]。

上述のカオス・エルゴード理論の研究 [1-3] により、2015年3月に博士の学位を取得しました (指導教員: 相澤洋二 早稲田大学教授)。それ以降は“学問的冒険”に出ることになり、本テーマは一時休止となりました。しかし、本年度 (2021年度) から、これ



* Masaki NAKAGAWA

1982年7月生まれ
早稲田大学 大学院先進理工学研究科
物理学及応用物理学専攻 博士後期課程
(2015年)
現在、大阪大学 大学院情報科学研究科
情報数理学専攻 非線形数理講座
特任講師 博士(理学)
専門/カオス・エルゴード理論, 物理現象の数理モデリングと情報処理への応用
TEL : 06-6879-7834
FAX : 06-6879-7834
E-mail : m.nakagawa@ist.osaka-u.ac.jp

までの経験と合わせた形で再び本テーマに関わる機会を得ることができました。それについては6章で述べたいと思います。

3. 数理生物学の研究

最初のポストク生活は広島で過ごすことになりました。一年目は、文部科学省 (MEXT) 科学研究費助成事業 新学術領域研究「少数性生物学」(領域提案型研究課題「少数分子反応ネットワーク理論の構築」研究代表者: 富樫祐一 広島大学特任准教授 [現・立命館大学教授]) の研究に、二年目は、日本医療研究開発機構 (AMED) 創薬等ライフサイエンス研究支援基盤事業 (生命動態システム科学推進拠点事業)「クロマチン動態数理研究拠点」(研究代表者: 楯 真一 広島大学教授) の研究に携わりました。

まず少数性生物学の研究について説明します。生物の活動の多くは化学反応 (触媒反応) が基盤となっています。細胞内の生体分子は、時に少数 (1つ2つ, あるいは0) になることが実験的に観察されていて、数理モデル研究により、その振る舞いが多数の場合とは質的に変化することが指摘されています。これを少数性効果と呼びます。この少数性効果が生命活動において担っている役割を模索する上で、少数性効果を予言する触媒反応ネットワーク理論の構築が求められていました。そこで筆者は、少数の場合でも触媒反応ネットワークの振る舞いを正しく記述できる微分方程式 (化学マスター方程式) を立式し、その定常状態を解析的に表現することで、各成分の分子数の平均・分散といった量に対する少数性効果を予言できる解析的枠組みを開発しました [4]。ただし、この枠組みが適用できるのは、ある条件を満たすネットワークの場合だけであり、条件を緩和することが強く望まれています。

つぎにクロマチン動態数理研究拠点の研究について説明します。細胞核内染色体であるクロマチンは、狭い細胞核の中で揺らぎながら高度な遺伝子発現制御を行っています。この高度な遺伝子発現制御メカニズムを解明する上で、クロマチンの各部位が互いにどのくらいの頻度で接触しているかを表す「コンタクト確率」が非常に重要な情報を与えると考えられています。近年ではコンタクト確率を実際の実験 (Hi-C 法) で計測できるようになっています。この

ような状況の中で筆者は、クロマチンの高分子鎖モデルからコンタクト確率を (おそらく初めて) 解析的に導出し、コンタクト確率が各部位間の“揺らぎ”を反映する量であることを示しました。この結果は、当時論文化しませんでした。その後、共同研究者によって実験データに適用できるように理論拡張され、より生物学的貢献度の高い論文として出版されました [5]。

4. ホタルの同期明滅モデルの研究と通信への応用

はじめてのポストク生活を過ごした広島もプロジェクトの終了をもって離れることになり、2017年度からは東京に戻ることになりました。つぎはもっと広く捉えて、現実の現象の理解や制御に役立つ理論研究をできるところを探しました。その結果、工学分野、特に情報通信分野 (研究主宰者: 田中久陽 電気通信大学准教授) の研究に携わることになりました。

IoT 技術の要素技術のひとつに無線センサネットワークがあります。これは無数の小型無線端末を配置して自律分散的にネットワークを構築する技術のことです。人の管理が困難な環境での用途が想定されており、電池の制約や通信の衝突などの問題が課題とされています。このような問題に対し進行波パターンを利用するアプローチがあります。本研究では、進行波パターンを作るために、新規なホタルの同期明滅メカニズムを応用することを目指しました。筆者は、この新規なホタルの同期明滅モデルに対し、シミュレーションで得られた進行波形成条件が進行波パターン形成のための必要十分条件であることを証明しました [6]。この結果は、このモデルを使った進行波が、比較的簡単な設定で確実に制御できることを示しています。この結果の通信手法への応用は今後の課題となっています。

上述の進行波パターンによる同期型の通信手法とは別に、同期状態を必要としない非同期型の通信手法も考えられています。この方向で筆者らは、端末に情報を行き渡らせるための非同期型フラッディングプロトコルを提案し、シミュレーション評価によりその特性を明らかにしています [7]。

5. 光学現象の数理モデリングと情報処理への応用

東京でのポストク生活も区切りを迎え、2019年

度から現在の大阪に移ることになりました。ひきつづき情報通信分野に携わりたいと思っていたところ、科学技術振興機構 (JST) 戦略的創造研究推進事業 (CREST) 研究課題「光ニューラルネットワークの時空間ダイナミクスに基づく計算基盤技術」(研究代表者: 鈴木秀幸 大阪大学教授) の研究に携わることになりました。

本研究では、小型・高速・低消費電力な情報処理デバイスの開発を目指して、ナノ粒子 (量子ドット) 間の FRET と呼ばれるエネルギー移動現象を活用することを検討しています。ここで FRET とは、光のエネルギーを吸収するなどして生成された励起状態の分子の励起エネルギーが、分子間の双極子相互作用により、基底状態の分子へ無輻射的に移動する現象のことです。ランダムにばら撒かれた量子ドットのネットワーク上で起きる、複雑で多様な「FRET ネットワーク」のダイナミクスが情報処理に活用できると考えています。FRET ネットワークを用いた情報処理はこれまで考えられていないので、まずは数理モデルを通してそのダイナミクスを理解する必要があります。

FRET は確率的な現象であり、化学反応の考え方でモデリングできます。本研究では FRET ネットワークを5つの化学反応式 (状態遷移則) で表現し、それを微分方程式 (マスター方程式) にまとめあげました。そして、パルス光で励起したあとの「多成分指数減衰」を理論的に示し、実験結果と整合することを確認しました [8]。情報処理の観点に立てば、多成分指数減衰は FRET ネットワークのメモリ機能に関係していると考えられます。FRET ネットワークを用いた情報処理の検討はまだこれからですが、簡単な時系列予測であれば可能であることがわかっています [9]。今後は、FRET ネットワークの特性を活かせる情報処理方式を、数理モデルを通して探っていきたいと思っています。

6. 極端現象の力学系モデルの研究と予測への応用

最後に、本年度 (2021 年度) より開始した極端現象の研究について、その目的・概要を簡単に説明します。本研究は、日本学術振興会 (JSPS) 科学研究費助成事業 若手研究「バーストメカニズムに基づく極端現象の統計的性質の理解とその予測への応用」に採択されたものです。

地震・気象・経済などでみられる稀に起こる極端な現象は、ひとたび起これば非常に大きな影響が生じます。このような極端現象の予測・制御は、科学のみならず社会的に非常に重要な課題です。一般に、極端現象に対しては少量のデータを前提にする必要がありますが、そのような研究は十分に開拓されていないようです。本研究では、このような極端現象に対して、力学系理論の立場からアプローチし、バーストメカニズムの振る舞いを反映した低次元モデルにより極端現象の統計的性質を理解し、それに基づいた少量のデータによる極端現象の予測方法論を開拓することを目指します。特に、ホモクリニック・ヘテロクリニックバーストと呼ばれるメカニズムに注目し、その低次元モデルとして無限峰写像力学系を用います。本研究により、少量のデータを前提とした極端現象の予測方法論の開拓が進むことが期待されます。

7. おわりに

極端現象に関する研究は、筆者のカオス・エルゴード理論の基礎研究 [1-3] を土台に、その知見を予測方法論に応用しようとするものです。これまで数理生物学や通信分野、さらに光と情報処理に関する分野と、さまざまな研究に携わりましたが、これらの経験が一つに融合し、極端現象の研究に繋がっているように感じています。5年後、本研究が筆者の研究の柱のひとつと言えるように大切に育てていきたいと思っています。

最後に、本稿執筆の機会を与えてくださった森田浩 大阪大学教授および執筆内容の相談に乗っていただいた鈴木秀幸 大阪大学教授、ならびに「生産と技術」関係者の皆様に感謝申し上げます。また、JST, AMED, MEXT, JSPS などによる支援に感謝致します。

参考文献

- [1] M. Nakagawa and Y. Aizawa, J. Phys. Soc. Jpn. **83** (2014), 104004.
- [2] M. Nakagawa, J. Phys. Soc. Jpn. **84** (2015), 034004.
- [3] 中川 正基, 京都大学数理解析研究所考究録 **1942** (2015), 125-137.
(或いは 中川 正基, 博士論文, 早稲田大学,

2015. <http://hdl.handle.net/2065/51171>)
- [4] M. Nakagawa and Y. Togashi, *Front. Physiol.* **7** (2016), 89.
- [5] S. Shinkai, M. Nakagawa, T. Sugawara, Y. Togashi, H. Ochiai, R. Nakato, Y. Taniguchi, and S. Onami, *NAR genom. bioinform.* **2**(2) (2020), lqaa020.
- [6] 中川 正基, 田中 久陽, *日本応用数理学会論文誌* **29**(3) (2019), 250-293.
- [7] 中川 正基, 慶田 朗, 田中 久陽, *電子情報通信学会論文誌 A* **J102-A**(3) (2019), 133-148.
- [8] M. Nakagawa, Y. Miyata, N. Tate, T. Nishimura, S. Shimomura, S. Shirasaka, J. Tanida, and H. Suzuki, *JOSA B* **38**(2) (2021), 294-299.
- [9] M. Nakagawa, Y. Miyata, N. Tate, T. Nishimura, S. Shimomura, S. Shirasaka, J. Tanida, and H. Suzuki, *Proceedings of NOLTA 2020* (2020), 217-220.

