

形をつくり、動きを読み解く ～微分幾何学を用いて切り拓く材料・構造体の力学～



技術解説

垂 水 竜 *

Creating Shapes, Deciphering Motion

— Mechanics of Materials and Structures Explored through Differential Geometry —

Key Words: Solid Materials and Structures, Nonlinear Mechanics, Soft Materials

はじめに

紙を編み、滑らかな曲面をつくる。空気を送り込み、薄い構造を大きく変形させる。弾性リボンを組み合わせ、素材単体では得られない力学応答を引き出す。編地の力学特性を、複雑に絡み合う一本の糸のレベルから読み解く。一見すると互いに異なるこれらの研究テーマは、私たちのグループでは一つの問いによって結ばれている：材料特性と幾何的構造を組み合わせることで、いかに新しい機能を創発できるのか？別の言い方をすれば、かたちの中に機能をプログラムする、と言えるかもしれない。私たちの研究で取り扱うソフトマテリアルは、小さな力で大きく変形する材料や構造体の総称である。ここには、ゴムやゲルのように材料物性そのものとして柔軟性を持つものだけでなく、繊維、紙、薄膜のように幾何的な形状によって柔軟性を発現するものも含まれる。

ソフトマテリアルを対象とする材料・構造力学研究の魅力は、その高い環境適応性にある。周囲の境界条件に応じて自在に形を変える、折り畳める、衝撃を受け流す、エネルギーを吸収するといった機能を、複雑な関節や多数の部品を用いずに実現することができる。一方で、この高い柔軟性は、構造体の設計・解析や制御を難しくする主要因でもある。わずかな初期条件や境界条件の差であっても、構造体の強い非線形力学応答によって、その後の変形や運

動は大きく変化する。一般的な機械設計では、まず実現したい形状や強度特性があり、それに応じて材料を選択することが多い。これに対して、ソフトマテリアルの設計では、この順序がしばしば逆転する。すなわち、ソフトマテリアルの変形特性を理解し、次にその特性を機能として利用する方法を考える。私たちの研究室では、こうしたソフトマテリアルの柔軟な変形特性を十分に記述するため、解析の基盤となる連続体力学を、微分幾何学をもとにしたリーマン多様体へ拡張するとともに、接触や摩擦を解析可能な汎用的な数値計算方法の開発を進めている。本稿では、これまで私たちが進めてきたいくつかの研究を紹介しながら、柔らかい材料と構造体に対する「かたち」と「動き」の設計原理について考えてみたい。

あみがみ：紙を使った曲面の構成

紙は平坦な形状を持ち、小さな力でもその形状を大きく変化することができる（例えば、印刷用紙は容易に丸めて円筒形状へ変形させることができる）。一見するとしなやかに感じられる紙の変形特性は、紙を構成する材質の柔軟性に起因するものではなく、厚さ方向にきわめて薄いという幾何学的特徴に由来している。紙はその薄さのため曲げ変形に対する抵抗を持たず、面外変形による大きな形状変化を実現している。しかしながら、紙は材質としての伸縮性をほとんど持たないことから、面内変形はほぼ不可能である。そのため、一枚の紙を一般の曲面（例えば球面）に変形させることはできない。ガウス曲率を持たない平坦な紙から、ガウス曲率を持つ曲面を作るためには、紙を曲げる面外変形に加えて、紙を伸縮させる面内変形も必要になる。ところが、紙は面内変形に対する変形能力がなく、無理に引き伸ばそうとすると破れてしまう。



* Ryuichi TARUMI

1975年8月生まれ
東京工業大学大学院 総合理工学研究科 材料物理学専攻 博士後期課程修了(2003年)博士(工学)
現在、大阪大学大学院 基礎工学研究科 機能創成専攻 教授
TEL : 06-6850-6185
Email: tarumi.ryuichi.es@osaka-u.ac.jp

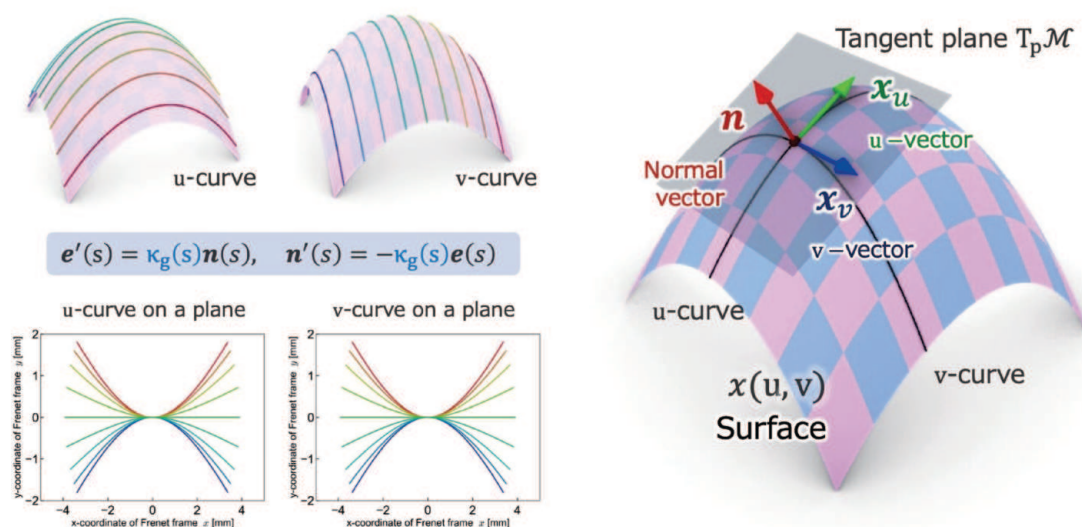


図1 あみがみによる放物面の設計例。ターゲットとなる曲面上に u 曲線と v 曲線を設定し、これを中心とした曲面片への分割を行う。この際、 u 曲線と v 曲線に沿った測地的曲率を評価し、フレネ・セレ方程式を用いて積分することによって、平面上の曲面片を構成する。得られた曲面片を互いに編み込むことで、ターゲットとなる曲面を構成することができる。

ここで少し捉え方を変えてみたい。紙は面内変形特性を持たないが、紙を切り出す際の形を工夫することによって、面外変形のみでも曲面形状を部分的に再現することができる。言い換えると、紙から曲面の一部を曲面片として切り出す際に、曲面のもつ曲率をプログラムすることができる。これが「あみがみ」の基本的な発想である。目標とする曲面を細い帯状の曲面片へ分割すれば、曲面全体を一枚の紙で覆う場合に比べて、各帯に生じる面内ひずみを小さく抑えることができる。さらに、これらの帯を相互に交差させて編み込むことで、曲面の形を保ちながら、空間内に滑らかな面を構成することが可能になる。

図1に放物面を対象としたあみがみの設計例を示す。まず、目標となる曲面を設定し、これを二次元パラメータを用いて表示する。つまり、三次元空間における曲面の座標を $x = x(u, v)$ として表す。このとき、曲面 x は三次元ユークリッド空間に埋め込まれた、二次元リーマン多様体として理解できる。放物面はグラフ表示できることから、その座標は次のように表現することができる： $x = (u, v, z(u, v))$ 。この曲面上には、 $u = \text{const.}$ となる u 曲線と、 $v = \text{const.}$ となる v 曲線を描くことができる。これらは三次元空間を動く空間曲線であり、弧長をパラメータとして二階微分することで、それぞれの曲率ベクトルが得ら

れる。この曲率ベクトルのうち、曲面の接平面方向へ射影された成分は測地的曲率と呼ばれている。リーマン多様体の基本的な性質として、多様体上の接平面は局所的なユークリッド空間とみなせる、というものがある。そのため、曲面上の空間曲線の測地的曲率は、平面曲線の曲率として解釈することができる。こうして得られた平面曲線の曲率をフレネ・セレ方程式に基づいて積分すれば、平面上に一本の曲線を描くことができる。この曲線は、曲面上の三次元曲線を最適に近似する、平面上の二次元曲線と考えられる。得られた曲線に所定の幅を持たせ、それを紙から切り出すことで、曲面片が得られる。この曲面片に曲げ変形を加え、互いに編み込むことで、目標とする曲面を構築することができる。図2には、この方法を用いて作成した曲面の例を示す。

現在、あみがみ研究の応用として、主に二つの方向性を検討している。一つは、曲面の力学への応用である。平面とは異なり、曲面は複数の力学的安定構造を取り得る。例えば、半球面は表と裏を入れ替えた二つの形状がエネルギー的に安定となる。通常、こうした安定状態間には弾性ひずみエネルギー障壁が存在するが、その障壁を乗り越える際には、スナップスルーと呼ばれる大きな不安定変形が生じる。微分幾何学を用いれば、曲面の多重安定構造や不安定変形を、より系統的に設計・解析することができ

るが、あみがみはその実証実験を行うための有効なプラットフォームになると期待される。

もう一つの応用展開として期待されるのは、ヒトの空間認知能力の涵養である。あみがみは、平らな紙から切り出した曲面片を組み合わせ、三次元曲面を生み出す工作である。私たちの研究室では、大学祭や各種イベントを通して「あみがみ教室」を開催している。これは子どもから高齢者まで楽しめる企画として好評を得ており、多い日には一日あたり400名を超える参加者を記録している。近年、理科離れが危惧されて久しい。難解な問題を解くだけではなく、あみがみという理数系の工作を通して、小中高校生が科学への関心を高めるきっかけとして利用できるかもしれない。また、空間認知を伴う手作業として、高齢者の認知機能の維持や認知症予防にも役立てられる可能性がある。今後は、そのような応用展開についても検討していきたい。



図2 あみがみを用いて作成した半球面、トーラス、懸垂曲面、楕円面の作成例。

空気圧駆動ソフトロボット

空気圧駆動ソフトロボットは、ゴムなどの柔らかい材料の内部に空洞を設け、空気を注入したときの膨張差によって、曲げ、ねじり、伸びといった多様な変形を生み出す構造である。変形した構造は周囲の物体形状に柔軟に適應するため、壊れやすい食品や不定形物を扱うソフトグリッパー、人の身体に装着する支援機器、狭い場所へ入り込む探索ロボットなどへの展開が期待される。駆動源が空気であるこ

とから構造を軽量化しやすく、硬い関節を多数用いずに複雑な運動をつくれる点も大きな利点である。私たちの研究室では、空気圧によって大きく形状を変化させるシェル構造体や、複数の空気室が直線的に連なったベンディングアクチュエータを主な研究対象としている。

研究例の一つとして、図3に空気圧駆動ソフトアクチュエータの動作実験結果を示す。これは円柱状のソフトアクチュエータであり、その内部には軸方向に沿って一様に伸びた空洞、すなわちキャビティが設けられている。このキャビティを加圧すると先端部から曲げ変形が生じ、さらに加圧を続けると、らせん形状へと形態変化する。図3では、加圧に伴う固定端(上端)と自由端(下端)との距離の変化を、圧力の関数として示している。数値計算では、加圧によって曲げ変形かららせん形状への変形が連続的に生じ、それに伴って両端間距離は単調に減少する。一方、実験では段階的な変化が見られ、必ずしも単調な応答は示していないが(これは、加圧速度に起因する慣性や、構造同士の接触摩擦の影響によるものと考えられる)、最終的な平衡状態における両端間距離は、数値計算と実験でよく一致している。

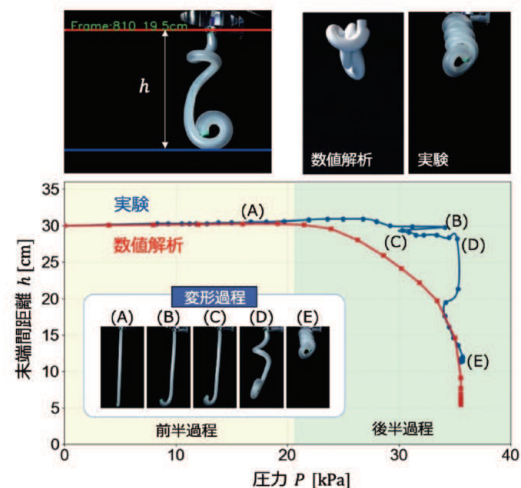


図3 つる植物の巻きひげを模倣したソフトアクチュエータの動作確認結果。

このソフトアクチュエータは、つる植物の巻きひげの変形様式を模倣して設計したものである。加圧によって巻きひげと同様のらせん構造が形成されることから、複雑形状を持つ物体に絡みつ়ソフトグリッパーとしての応用が期待される。そこで、把持対象として柔らかい風船を用い、把持実験を行った。

図4にその結果を示す。加圧によってソフトアクチュエータが風船に絡みつки、把持して持ち上げることができる。また、減圧によってアクチュエータの形状を戻すことで、把持した風船をリリースすることもできる。さらに、変形によってキャビティの体積が変われば、同じ量の空気を注入しても内部圧力の履歴は変化する。対象物に触れたとき、持ち上げに失敗したとき、保持中に落下したときでは、圧力波形に異なる特徴が現れる。これは、圧力を駆動入力として用いるだけでなく、ロボット自身の状態を知るためのセンサ情報として利用できることを意味している。追加の柔軟センサを多数貼り付けなくても、注入空気量と圧力の時系列から接触や把持状態を推定できれば、柔らかいロボットの自己センシングと閉ループ制御へとつながる。

設計条件を広い範囲で変化させた際の結果を、成功・失敗の相図として整理することもまた重要である。対象物との初期距離、アクチュエータの配置、注入空気量、持ち上げ速度を変えると、対象物に届かない、接触するが持ち上がらない、一度は保持するが途中で落下する、安定に保持できる、といった複数の状態が現れる。単一の最適条件だけを探すのではなく、多少の位置ずれや材料ばらつきがあっても成功する領域の広い設計を選ぶことで、実環境に強いソフトロボットへ近づけることができる。

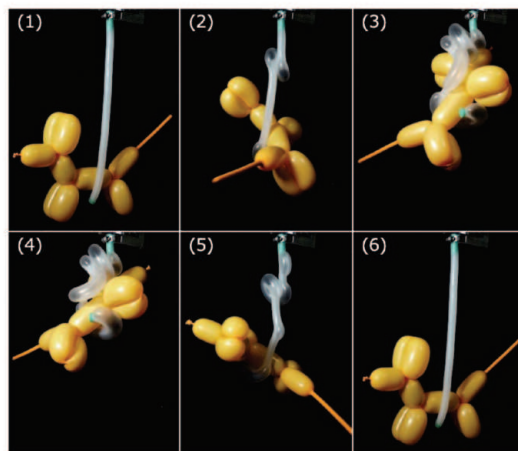


図4 ソフトアクチュエータによる風船の把持、持ち上げ、リリース実験。

MPMシミュレーションシステム

ソフトマテリアルの設計では、試作品を作製して動作実験を行うだけでなく、なぜその形に変形したのか？条件を変えると、どこでどのような応答が現れるのか？を系統的に理解し、その知見を設計や制御へ反映させることが重要である。そのためには、複雑な非線形挙動を再現できる計算モデルが有効である。しかし一般に、大変形と接触・摩擦を同時に扱う数値解析は容易ではない。例えば、構造設計・解析において標準的に用いられる有限要素法(FEM)は、微小変形下では極めて高精度な解析を可能とするが、自己接触や環境との接触を伴う大変

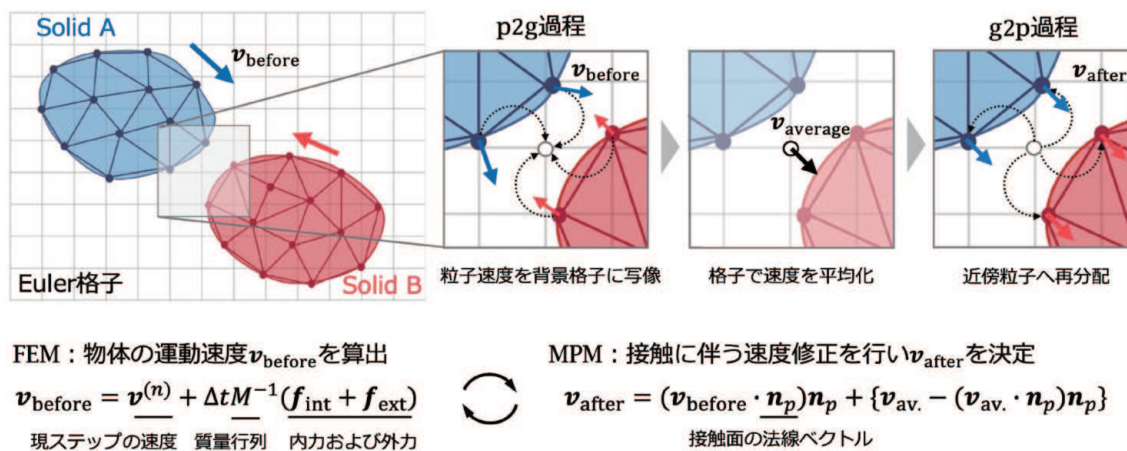


図5 MPM法を用いた物質の衝突過程に関するシミュレーション。物質点の運動をLagrange的に追跡するFEM解析と、空間の背後に設置したEuler格子を用いて、運動方程式の数値積分の際に速度情報の平滑化を行うことで、複雑な接触判定を用いずに接触・衝突解析や、それに伴う摩擦解析を行うことができる。

形問題は得意でない。もしFEMでこうした解析を行う場合には、変形に伴って大きく変化する表面位置を逐次追跡し、接触判定を行い、さらに接触部に働く反力を適切に補正する必要がある。このような処理には大きな計算コストを必要とする。

そこで私たちの研究グループでは、Material Point Method (MPM) を基盤とするシミュレーションシステムを開発している。図5に、MPMを用いた数値計算過程を模式的に示す。MPMでは、物体をラグランジュ的な物質点として追跡しながら、計算領域に配置した背景格子上で運動方程式を解いている。各時間ステップでは、物質点が持つ質量、運動量、応力などの情報を背景格子へ写像し、格子上で速度場や力を更新した後、その結果を再び物質点へ戻す。このように、ラグランジュ的な粒子追跡とオイラー的な格子計算を組み合わせることで、大変形を伴う連続体の運動を安定に扱うことができる。この手法の大きな利点は、FEMのように変形した要素メッシュを直接追跡する必要がない点にある。物質点は大きく移動・変形しても、運動方程式の数値積分は背景格子上で行われる。そのため、自己接触や外部環境との接触を伴う問題であっても、明示的な接触判定に大きく依存することなく、計算過程の中で接触を自然に取り入れることができる。また、接触力を接触面の法線方向成分と接線方向成分に分解することで、接触面に働く摩擦力の評価も可能となる。

図6に、MPMを用いたソフトグリッパーのシミュレーション例を示す¹⁾。このソフトグリッパーは、直方体形状のユニットセルが連結された構造を有しており、各ユニットセルの内部にはキャビティが設けられている。これらのキャビティは内部で互いに連結しているため、外部から空気圧を加えると、キャビティ内部に静水圧が負荷され、構造全体が膨張する。このとき、隣接するユニットセル同士の間には物理的な接触が生じ、その接触によってグリッパー全体の曲げ変形が引き起こされる。MPMを用いることで、このような大変形、自己接触、摩擦を伴う複雑な変形過程を数値的に再現することが可能となる。今後は、このシミュレーションシステムを活用し、ソフトロボットの变形機構の理解や、把持性能を高めるための形状最適化、さらには実験結果と連携した設計支援へと展開している¹⁾⁻³⁾。

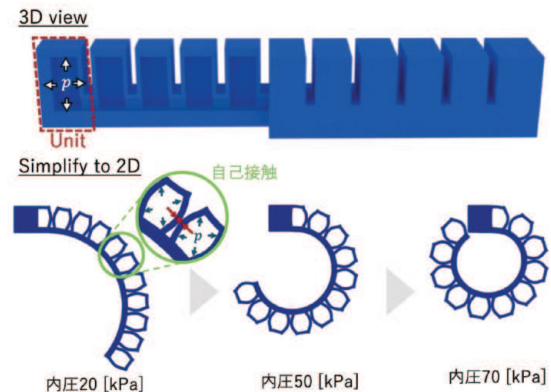


図6 加圧によるソフトグリッパーの曲げ変形過程のMPMシミュレーション結果。キャビティの加圧に伴う膨張によって相互接触が生じ、曲げ変形を生み出す。

おわりに

本稿では、私たちの研究グループで進めているソフトマテリアルの力学研究について、いくつかの研究例を紹介した。これらの研究に共通して現れるのは、幾何学という視点である。曲線や曲面を数学的に設計し、その形状や運動形態を力学的に制御する。ここでは材料そのものの柔らかさだけでなく、幾何的構造によって生まれる変形の自由度を利用し、そこに機能を埋め込むことが、私たちの研究の中心にある。紙面の都合で本稿では紹介しきれなかったが、これらのほかにも、切り紙を用いて力とトルクの変換を行うカイラル構造体の設計⁴⁾、一本の糸のレベルで力学応答を解像する編み物の力学シミュレーション⁵⁾、半球状シェル構造体のスナップスルー座屈を利用したジャンピングマシンの設計⁶⁾など、幾何学と非線形力学を基盤とする研究を進めている。これらの研究で重要なのは、どのような幾何学的構造が新しい変形や機能を生み出すのか、という観点から材料や構造の力学研究を捉え直すことである。ソフトマテリアルの力学を切り拓くことは、柔らかい材料の設計にとどまらず、分野を越えて共有できる新しい設計原理を見いだすことにつながる。そこに、これからのものづくりの大きな可能性があると感じている。

最後に、本稿の主題であるソフトマテリアルの力学解析と並行して進めている、金属・セラミックスなどのハードマテリアルに関する理論研究についても少し触れておきたい。私たちの研究グループでは、結晶性材料中の格子欠陥が生み出す力学場の解析に

も取り組んでいる。結晶性材料の強度や塑性変形特性は、結晶格子の乱れである格子欠陥によって大きく左右される。とりわけ、線状の格子欠陥である転位は、材料の塑性変形を生み出す直接的なメカニズムである。そのため、転位の力学を理解することは工学的に極めて重要であり、これまでに多くの研究が行われてきた。私たちの取り組みの特徴は、この転位の理論解析に微分幾何学を導入する点にある。具体的には、転位によって生じる結晶格子のひずみを、リーマン・カルタン多様体と呼ばれる幾何学的空間上で表現する。従来の理論のようにユークリッド空間内で議論するのではなく、解析の舞台をリーマン・カルタン多様体へと拡張することで、転位が生み出す力学場について新たな知見が得られ始めている⁷⁾⁻⁹⁾。

格子欠陥の解析に用いている数学的基盤(微分幾何学)は、本稿で紹介したソフトマテリアルの解析とも共通している。このことは、構造体として柔らかいか硬いか、あるいは材質が紙、ゴム、編地、金属、セラミックスのいずれであるかに関わらず、変形や運動を記述するうえで微分幾何学が強力な枠組みを与えることを意味している。幾何学的な思考の深さは、材料・構造体の力学特性の解析や、新しい構造体の設計に関する創造力に直結しているように感じられる。

参考文献

- 1) 橋口勲武, 小林舜典, 垂水竜一: 自己接触型ソフトグリッパの形状最適化, 日本計算工学会論文集, 26巻 02-261211 (2026)
- 2) 橋口勲武, 吉村圭祐, 小林舜典, 垂水竜一: FEM-MPMを用いた接触を伴う空気圧駆動型ソフトロボットの数値解析, 日本機械学会論文集, 92 巻 954 号 p. 25-00202 (2026年)
- 3) Isamu Hashiguchi, Jike Han, Shunsuke Kobayashi, Takamitsu Sasaki and Ryuichi Tarumi: A unified topology optimization framework for dynamic contact and friction, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 457, 118983 (2026).
- 4) Isamu Hashiguchi, Tomoka Nakahara, Kota Fukui, Shunsuke Kobayashi and Ryuichi Tarumi: Chirality-induced tension-rotation coupling in cylindrical kirigami structures, Royal Society Open Science, VOL. 13, 250983 (2026).
- 5) K. Tajiri, R. Murakami, S. Kobayashi R. Tarumi and T.G. Sano: Curling morphology of knitted fabrics: Structure and Mechanics, Extreme Mechanics Letters, Vol. 76, 102300 (2025).
- 6) Takara Abe, Isamu Hashiguchi, Yukitake Nakahara, Shunsuke Kobayashi, Ryuichi Tarumi, Hidetoshi Takahashi, Genya Ishigami, Tomohiko G. Sano: Snap and Jump: How Elastic Shells Pop Out, Advanced Robotics Research, Volume 1, e2500041 (2025).
- 7) Shunsuke Kobayashi, Katsumi Takemasa and Ryuichi Tarumi: Revisiting Volterra defects: geometrical relation between edge dislocations and wedge disclinations, Royal Society Open Science, Vol. 12, 242213 (2025).
- 8) S. Kobayashi and R. Tarumi: Biot-Savart law in the geometrical theory of dislocations, Royal Society Open Science, Vol. 12, 241568 (2025).
- 9) S. Kobayashi and R. Tarumi: Geometrical frustration in nonlinear mechanics of screw dislocation, Royal Society Open Science, Vol. 11, 240711 (2024).

